

Rationale Zahlen – Lernzettel

Mathe · Klasse 7 · 7 Kapitel · Glossar · Prüfungsfragen

Rationale Zahlen sind alle Zahlen, die du als Bruch schreiben kannst — mit Vorzeichen, also positiv oder negativ. In diesem Material lernst du, wie du sie auf der Zahlengeraden ordnest, ihren Betrag und ihre Gegenzahl bestimmst, mit ihnen rechnest und Sachaufgaben zu Temperatur, Kontostand und Höhen löst. Nach dem Durcharbeiten beherrschst du die Vorzeichenregeln sicher und weißt, wie du dir mit Rechengesetzen Arbeit sparst.

1. Positive und negative Zahlen auf der Zahlengeraden anordnen und vergleichen

Die **Zahlengerade** ist ein Zahlenstrahl, der in beide Richtungen weitergeht. Rechts von der Null stehen die **positiven Zahlen**, links davon die **negativen Zahlen**. Je weiter rechts eine Zahl liegt, desto größer ist sie — das gilt auch im negativen Bereich.

🔔 Merksatz

Auf der Zahlengeraden gilt immer: **Weiter rechts = größer, weiter links = kleiner**. Deshalb ist -2 größer als -5 , obwohl 5 größer als 2 ist.

- Die Zahl 0 ist der Nullpunkt und trennt die positiven von den negativen Zahlen; sie selbst ist weder positiv noch negativ.
- Jede positive Zahl ist größer als jede negative Zahl, denn sie liegt immer weiter rechts.
- Bei zwei negativen Zahlen ist die betragsmäßig kleinere die größere Zahl, weil sie näher an der Null liegt.
- Das Zeichen $<$ bedeutet „kleiner als“, das Zeichen $>$ bedeutet „größer als“.

🧪 Zahlen der Größe nach ordnen

Ordne diese Zahlen aufsteigend: 3 ; -4 ; 0 ; $-1,5$; 2 .

$$-4 < -1,5 < 0 < 2 < 3$$

Zuerst die negativen Zahlen (die weiter links liegende zuerst), dann die Null, dann die positiven.

⚠ Typischer Fehler

Viele denken, -5 sei größer als -2 , weil 5 größer als 2 ist. Das ist falsch! Bei negativen Zahlen dreht sich die Reihenfolge um: $-5 < -2$.

Vergleich der beiden Zahlenbereiche:

MERKMAL	POSITIVE ZAHLEN	NEGATIVE ZAHLEN
Lage auf der Zahlengeraden	rechts von 0	links von 0
Vorzeichen	$+$ (oft weggelassen)	$-$ (immer nötig)
Größer wird es ...	nach rechts	nach rechts (Richtung 0)
Beispiele	$+3$; $1,5$; $\frac{1}{2}$	-3 ; $-1,5$; $-\frac{1}{2}$

2. Betrag und Gegenzahl einer rationalen Zahl angeben

Der **Betrag** einer Zahl gibt ihren Abstand zur Null auf der Zahlengeraden an. Weil ein Abstand nie negativ sein kann, ist der Betrag immer positiv oder null. Man schreibt ihn mit senkrechten Strichen, zum Beispiel $|-4| = 4$. Die **Gegenzahl** einer Zahl erhält man, indem man ihr Vorzeichen umdreht.

💡 Merksatz

Der **Betrag** macht eine Zahl positiv (Abstand zur Null): $|-7| = 7$ und $|7| = 7$. Die **Gegenzahl** klappt eine Zahl an der Null auf die andere Seite: Die Gegenzahl von -7 ist $+7$.

- Der Betrag von $+5$ und der Betrag von -5 sind beide gleich 5 , weil beide Zahlen den Abstand 5 zur Null haben.
- Die Gegenzahl von 0 ist wieder 0 , denn die Null liegt genau auf dem Nullpunkt.
- Eine Zahl und ihre Gegenzahl haben immer denselben Betrag.
- Addierst du eine Zahl und ihre Gegenzahl, kommt stets 0 heraus, zum Beispiel $6 + (-6) = 0$.

ZAHLE	BETRAG	GEGENZAHLE
$+8$	8	-8
-3	3	$+3$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$

ZAHL	BETRAG	GEGENZAHL
0	0	0
2,5	2,5	-2,5

⚠ Nicht verwechseln

Betrag und Gegenzahl sind zwei verschiedene Dinge. Der Betrag von -3 ist 3 (immer positiv), die Gegenzahl von $+3$ ist -3 (nur das Vorzeichen dreht sich).

3. Rationale Zahlen addieren und subtrahieren (auch mit Klammern)

Beim Addieren und Subtrahieren rationaler Zahlen kommt es auf die Vorzeichen an. Am sichersten stellst du dir Bewegungen auf der Zahlengeraden vor: Wandle eine Subtraktion zuerst in die Addition der Gegenzahl um. Beim Addieren einer positiven Zahl gehst du nach rechts, beim Addieren einer negativen Zahl nach links. Zum Beispiel bedeutet $5 + (-9)$: von 5 aus neun Schritte nach links, du landest bei -4 . Wichtig sind zwei Regeln zum Auflösen von Klammern.

💡 Klammerregeln bei Plus und Minus

Plus vor der Klammer — alles bleibt gleich:

$$a + (-b) = a - b \quad a + (+b) = a + b$$

Minus vor der Klammer — jedes Vorzeichen in der Klammer dreht sich um:

$$a - (-b) = a + b \quad a - (+b) = a - b$$

So gehst du beim Addieren vor:

1. Haben beide Zahlen **dasselbe Vorzeichen**, addiere die Beträge und behalte das gemeinsame Vorzeichen: $-4 + (-3) = -7$.
2. Haben beide Zahlen **verschiedene Vorzeichen**, subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren; das Ergebnis bekommt das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag: $-8 + 5 = -3$.
3. Bei einer Subtraktion wandelst du zuerst „minus“ in „plus die Gegenzahl“ um: $3 - 7 = 3 + (-7) = -4$.

Rechnen mit Klammern

$$-6 - (-4) = -6 + 4 = -2$$

$$5 + (-9) = 5 - 9 = -4$$

$$-3 - (+7) = -3 - 7 = -10$$

Doppeltes Minus

$-(-b)$ ist $+b$! Zwei Minuszeichen direkt nebeneinander ergeben ein Plus. Deshalb ist $2 - (-5) = 2 + 5 = 7$.

RECHNUNG	UMGEFORMT	ERGEBNIS
$-4 + (-3)$	$-4 - 3$	-7
$-4 - (-3)$	$-4 + 3$	-1
$7 + (-10)$	$7 - 10$	-3
$7 - (-10)$	$7 + 10$	17

4. Rationale Zahlen multiplizieren und dividieren (Vorzeichenregeln)

Beim Multiplizieren und Dividieren rechnest du zuerst mit den Beträgen (wie mit ganz normalen Zahlen) und bestimmst dann das Vorzeichen des Ergebnisses. Für das Vorzeichen gilt eine einfache Regel, die für Mal und Geteilt gleich ist.

Vorzeichenregel für Mal und Geteilt

Gleiche Vorzeichen ergeben Plus, verschiedene Vorzeichen ergeben Minus.

$$(+) \cdot (+) = + \quad (-) \cdot (-) = + \quad (+) \cdot (-) = - \quad (-) \cdot (+) = -$$

- Merke dir kurz: „**plus mal plus** = plus, **minus mal minus** = plus, **gemischt** = minus“.
- Dieselbe Regel gilt beim Teilen: $-20 : (-4) = +5$ und $-20 : 4 = -5$.
- Bei mehreren Faktoren zählst du die Minuszeichen: Eine **gerade Anzahl** Minuszeichen ergibt ein positives, eine **ungerade Anzahl** ein negatives Ergebnis.
- Multiplizierst du eine Zahl mit 0, ist das Ergebnis immer 0.

Vorzeichen zählen

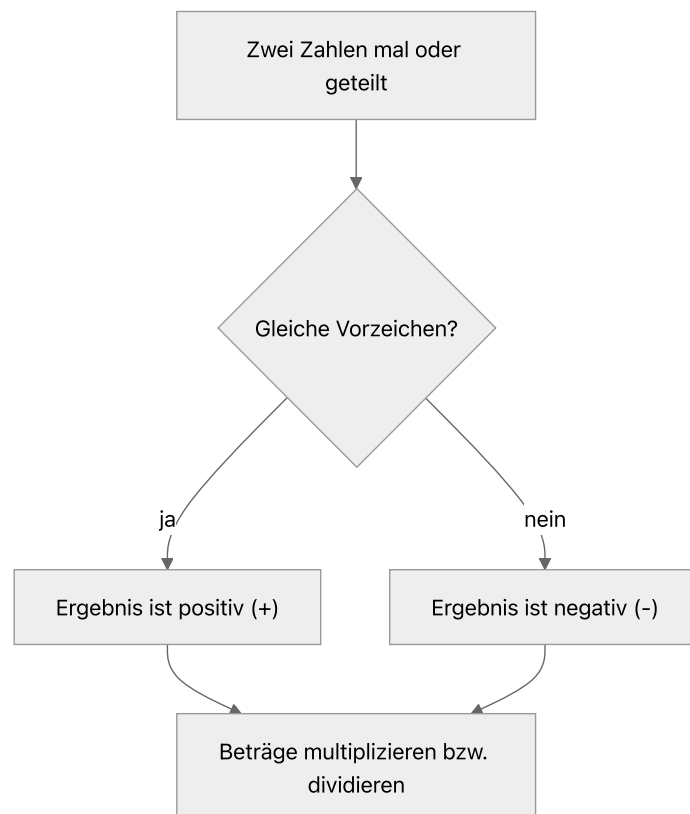
$$(-2) \cdot (-3) \cdot (-1) = -6$$

Es sind **drei** Minuszeichen (ungerade Anzahl), also ist das Ergebnis negativ.

$$(-2) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) = +6$$

Jetzt sind es **vier** Minuszeichen (gerade Anzahl), also positiv.

RECHNUNG	VORZEICHEN	ERGEBNIS
$(+6) \cdot (+7)$	gleich $\rightarrow +$	42
$(-6) \cdot (-7)$	gleich $\rightarrow +$	42
$(-6) \cdot (+7)$	verschieden $\rightarrow -$	-42
$(+48) : (-8)$	verschieden $\rightarrow -$	-6
$(-48) : (-8)$	gleich $\rightarrow +$	6



5. Brüche und Dezimalzahlen mit Vorzeichen rechnen

Die Vorzeichenregeln aus den Abschnitten 3 und 4 gelten genauso für Brüche und Dezimalzahlen. Du musst nur zusätzlich die üblichen Bruch- und Kommaregeln beachten: Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen brauchst du einen gemeinsamen Nenner, beim Multiplizieren rechnest du Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.

Merksatz

Bei **Mal und Geteilt** bestimmst du das Vorzeichen und rechnest mit den **Beträgen** — egal ob Bruch oder Dezimalzahl. Bei **Plus und Minus** gelten die Additionsregeln aus Kapitel 3; bei Brüchen brauchst du dafür einen gemeinsamen Nenner.

Brüche addieren/subtrahieren mit Vorzeichen:

1. Bringe beide Brüche auf den gemeinsamen Nenner.
2. Beachte die Rechenzeichen und addiere die vorzeichenbehafteten Zähler nach den Regeln aus Kapitel 3.
3. Rechne die Zähler zusammen und kürze am Ende, wenn möglich.

Brüche mit Vorzeichen

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

Dezimalzahlen mit Vorzeichen

$$-3,5 + 1,2 = -2,3$$

$$(-0,4) \cdot (-2,5) = 1,0 = 1$$

RECHNUNG	ERGEBNIS
$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{3}{5} : \frac{3}{10}$	-2
$-2,5 - 1,5$	-4
$(-1,2) \cdot 3$	$-3,6$

⚠ Kommastellen und Nenner nicht vergessen

Auch wenn das Vorzeichen im Vordergrund steht: Bei Brüchen brauchst du beim Plus/Minus immer denselben Nenner, und bei Dezimalzahlen müssen beim schriftlichen Addieren und Subtrahieren die Kommas untereinander stehen.

6. Klammern auflösen und Rechengesetze für Rechenvorteile nutzen

Mit den **Rechengesetzen** kannst du geschickt umsortieren und dir viel Arbeit sparen. Wichtig sind das Kommutativgesetz (Vertauschen), das Assoziativgesetz (Umklammern) und das Distributivgesetz (Ausmultiplizieren und Ausklammern). Sie gelten auch mit negativen Zahlen.

🔗 Die drei Rechengesetze

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ **Assoziativgesetz:** $(a + b) + c = a + (b + c)$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

- Suche beim Addieren gezielt **Paare, die sich zu runden Zahlen ergänzen**, und rechne sie zuerst zusammen.
- Beim Distributivgesetz kannst du eine Zahl **ausklammern**, wenn sie in mehreren Summanden steckt:
 $7 \cdot 13 + 7 \cdot 7 = 7 \cdot (13 + 7) = 7 \cdot 20 = 140$.
- Ein **Minus vor der Klammer** dreht beim Auflösen jedes Vorzeichen in der Klammer um.
- Geschicktes Umsortieren und Ausklammern sind Hilfen, keine Pflicht: Du darfst auch den üblichen Rechenweg wählen. Dabei gelten weiterhin Klammern zuerst und Punkt- vor Strichrechnung; gleichrangige Rechenarten rechnest du von links nach rechts.

⚖ Rechenvorteil durch Umsortieren

$$-17 + 25 + (-3) = (-17 - 3) + 25 = -20 + 25 = 5$$

Erst die beiden Zahlen zusammenfassen, die eine runde -20 ergeben.

⚖ Klammer mit Minus auflösen

$$12 - (5 - 8 + 3) = 12 - 5 + 8 - 3 = 12$$

Vor der Klammer steht ein Minus, deshalb dreht sich jedes Vorzeichen: aus $+5$ wird -5 , aus -8 wird $+8$, aus $+3$ wird -3 .

⚠ Häufigster Fehler beim Ausmultiplizieren

Beim Distributivgesetz musst du **jeden** Summanden in der Klammer multiplizieren, nicht nur den ersten:

$$-3 \cdot (x - 4) = -3x + 12 \quad (\text{nicht } -3x - 4)$$

7. Sachaufgaben mit Temperaturen, Kontostand und Höhenangaben

In Sachaufgaben stecken rationale Zahlen oft versteckt: Ein Minusbetrag auf dem Konto sind Schulden, eine Temperatur unter null ist negativ, eine Höhe unter dem Meeresspiegel bekommt ein Minuszeichen. Du übersetzt den Text in eine Rechnung, achtest auf die Vorzeichen und schreibst am Ende einen **Antwortsatz**.

💡 Merksatz

Eine **Änderung** (Temperatur steigt oder fällt, Kontostand ändert sich) berechnest du als „**Endwert minus Anfangswert**“. Das Vorzeichen zeigt die Richtung: negativ heißt gefallen, kälter oder tiefer. Fragst du dagegen, wie **groß der Unterschied** zwischen zwei Temperaturen oder Höhen ist, rechnest du größerer Wert minus kleinerer Wert.

SITUATION	POSITIV BEDEUTET ...	NEGATIV BEDEUTET ...
Temperatur	über 0 °C (warm)	unter 0 °C (Frost)
Kontostand	Guthaben	Schulden / Minus
Höhe	über dem Meeresspiegel	unter dem Meeresspiegel

So löst du eine Sachaufgabe:

1. Lies den Text und ordne jeder Angabe das richtige Vorzeichen zu.
2. Schreibe die passende Rechnung auf (meist „Endwert – Anfangswert“).
3. Rechne mit den Vorzeichenregeln aus.
4. Formuliere einen Antwortsatz mit Einheit.

Temperatur

Morgens sind es $-6\text{ }^{\circ}\text{C}$, mittags $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Um wie viel ist die Temperatur gestiegen?

$$4 - (-6) = 4 + 6 = 10$$

Antwort: Die Temperatur ist um $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ gestiegen.

Kontostand

Auf dem Konto sind -120 € (Schulden). Es kommen 200 € Gehalt dazu, dann werden 30 € abgebucht.

$$-120 + 200 - 30 = 50$$

Antwort: Der neue Kontostand beträgt $+50\text{ €}$ (Guthaben).

Höhenunterschied

Ein Taucher ist 18 m unter dem Meeresspiegel (-18 m), ein Berggipfel liegt bei $+2500\text{ m}$. Wie groß ist der Höhenunterschied?

$$2500 - (-18) = 2500 + 18 = 2518$$

Antwort: Der Höhenunterschied beträgt 2518 m .

Glossar

BEGRIFF	DEFINITION
Assoziativgesetz	Rechengesetz, das erlaubt, Summanden (oder Faktoren) beliebig umzuklammern: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Betrag	Abstand einer Zahl zur Null auf der Zahlengeraden; immer positiv oder null, geschrieben mit $ $.
Dezimalzahl	Zahl mit Komma, z. B. $-3,5$; kann positiv oder negativ sein.
Distributivgesetz	Rechengesetz zum Aus- und Einklammern: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Gegenzahl	Zahl mit umgekehrtem Vorzeichen; die Gegenzahl von -7 ist $+7$.
Kommutativgesetz	Rechengesetz, das erlaubt, Summanden (oder Faktoren) zu vertauschen: $a + b = b + a$.
Nenner	Untere Zahl eines Bruchs; gibt an, in wie viele Teile das Ganze geteilt ist.

BEGRIFF	DEFINITION
Negative Zahl	Zahl kleiner als null, links vom Nullpunkt der Zahlengeraden.
Positive Zahl	Zahl größer als null, rechts vom Nullpunkt der Zahlengeraden.
Rationale Zahl	Zahl, die sich als Bruch aus ganzen Zahlen schreiben lässt, mit Vorzeichen.
Vorzeichen	Das + oder – vor einer Zahl, das angibt, ob sie positiv oder negativ ist.
Vorzeichenregel	Regel für Mal und Geteilt: gleiche Vorzeichen ergeben Plus, verschiedene Minus.
Zahlengerade	Gerade mit Nullpunkt, auf der alle rationalen Zahlen der Größe nach angeordnet sind.

FAQ — typische Prüfungsfragen

Welche Zahl ist größer: -8 oder -3 ?

-3 ist größer als -8 . Auf der Zahlengeraden liegt -3 weiter rechts als -8 , und weiter rechts bedeutet immer größer. Zwar ist die Zahl 8 größer als 3, doch bei negativen Zahlen dreht sich die Reihenfolge um: Je näher eine negative Zahl an der Null liegt, desto größer ist sie. Man schreibt also $-8 < -3$.

Was ist der Unterschied zwischen Betrag und Gegenzahl?

Der Betrag gibt den Abstand einer Zahl zur Null an und ist immer positiv oder null, zum Beispiel $|-5| = 5$. Die Gegenzahl entsteht dagegen, indem man nur das Vorzeichen umdreht, also ist die Gegenzahl von -5 gleich $+5$ und die Gegenzahl von $+5$ gleich -5 . Der Betrag macht also immer positiv, während die Gegenzahl die Zahl an der Null spiegelt. Beide haben aber denselben Zahlenwert ohne Vorzeichen.

Wie löst man eine Klammer mit einem Minus davor auf?

Steht vor einer Klammer ein Minus, dreht sich beim Auflösen jedes Vorzeichen in der Klammer um. Aus einem Plus wird ein Minus und aus einem Minus ein Plus. Zum Beispiel gilt $12 - (5 - 8) = 12 - 5 + 8 = 15$. Der Grund ist, dass das Minus wie eine Multiplikation mit -1 auf alle Summanden wirkt.

Was ergibt „minus mal minus“?

Minus mal minus ergibt plus. Nach der Vorzeichenregel ergeben gleiche Vorzeichen immer ein positives Ergebnis, also ist zum Beispiel $(-4) \cdot (-3) = +12$. Diese Regel gilt genauso beim Dividieren: $(-12) : (-3) = +4$. Nur bei verschiedenen Vorzeichen wird das Ergebnis negativ.

Wie bestimmt man das Vorzeichen bei mehreren Faktoren?

Man zählt die Anzahl der Minuszeichen. Ist die Anzahl gerade, ist das Ergebnis positiv; ist sie ungerade, ist das Ergebnis negativ. Zum Beispiel hat $(-2) \cdot (-1) \cdot (-3)$ drei Minuszeichen, also ist das Ergebnis -6 (negativ). Danach multipliziert man einfach die Beträge miteinander.

Wie addiert man zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen?

Man subtrahiert den kleineren Betrag vom größeren und gibt dem Ergebnis das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag. Bei $-8 + 5$ ist der größere Betrag 8 (von -8), also ist das Ergebnis negativ: $-8 + 5 = -3$. So verrechnet man das „Nach-rechts-Gehen“ mit dem „Nach-links-Gehen“ auf der Zahlengeraden.

Wie berechnet man einen Temperaturunterschied?

Eine Änderung rechnet man als „Endwert minus Anfangswert“. Steigt die Temperatur von -6 °C auf $+4\text{ °C}$, rechnet man $4 - (-6) = 4 + 6 = 10$, also 10 °C Anstieg. Ein positives Ergebnis bedeutet, dass es wärmer geworden ist, ein negatives, dass es kälter geworden ist. Zum Schluss gehört immer ein Antwortsatz mit der Einheit dazu.

Was bedeutet ein negativer Kontostand?

Ein negativer Kontostand bedeutet Schulden, also dass man mehr Geld ausgegeben hat, als vorhanden war. Steht auf dem Konto -120 € und kommen 200 € dazu, rechnet man $-120 + 200 = 80$, also ein Guthaben von 80 € . Solange das Ergebnis negativ bleibt, ist das Konto im Minus.

Wie kann man mit Rechengesetzen Zeit sparen?

Man sortiert die Zahlen mit dem Kommutativgesetz so um, dass zuerst Paare mit runden Ergebnissen entstehen. Bei $-17 + 25 + (-3)$ fasst man -17 und -3 zu -20 zusammen und rechnet dann $-20 + 25 = 5$. Auch das Distributivgesetz spart Arbeit, indem man einen gemeinsamen Faktor ausklammert. Diese Umformungen sind erlaubte Hilfen, aber keine Pflicht.

Wie multipliziert man Brüche mit Vorzeichen?

Zuerst bestimmt man das Vorzeichen des Ergebnisses mit der Vorzeichenregel, dann multipliziert man Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner. Bei $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ ergeben verschiedene Vorzeichen ein Minus, und $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, also insgesamt $-\frac{2}{5}$. Am Ende kürzt man das Ergebnis, wenn möglich.