

Binomische Formeln – Lernzettel

Mathe · Klasse 8 · 7 Kapitel · Glossar · Prüfungsfragen

Binomische Formeln sind Abkürzungen, mit denen du bestimmte Klammern blitzschnell ausmultiplizierst und Terme rückwärts wieder in eine Klammer verwandelst. Nach dem Durcharbeiten kennst du die drei Formeln auswendig, setzt Zahlen und Variablen sicher ein, achtest auf die Vorzeichen und nutzt die Formeln sogar zum Kopfrechnen.

1. Die drei binomischen Formeln auswendig können

Ein **Binom** ist eine Summe oder Differenz aus zwei Gliedern, zum Beispiel $a + b$ oder $a - b$. Wenn du ein solches Binom quadrierst oder zwei „gespiegelte“ Binome multiplizierst, entstehen immer dieselben Muster – genau diese Muster sind die drei binomischen Formeln. Sie müssen absolut sicher sitzen, denn alles andere baut darauf auf.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

FORMEL	NAME	AUSMULTIPLIZIERT	MERKMAL
$(a + b)^2$	1. binomische Formel (Plus-Formel)	$a^2 + 2ab + b^2$	mittleres Glied mit +
$(a - b)^2$	2. binomische Formel (Minus-Formel)	$a^2 - 2ab + b^2$	mittleres Glied mit –
$(a + b)(a - b)$	3. binomische Formel (Plus-mal-Minus)	$a^2 - b^2$	nur zwei Glieder, kein Mittelglied

- Bei der **ersten und zweiten Formel** entstehen immer **drei Glieder**: das Quadrat des ersten, das doppelte Produkt und das Quadrat des zweiten.
- Der einzige Unterschied zwischen 1. und 2. Formel ist das **Vorzeichen des mittleren Gliedes** ($+2ab$ oder $-2ab$).
- Bei der **dritten Formel** fällt das mittlere Glied weg, weil sich $+ab$ und $-ab$ gegenseitig aufheben; übrig bleibt die Differenz der beiden Quadrate.

Merksatz

Erstens hoch zwei, plus/minus doppeltes Produkt, plus zweitens hoch zwei. Und bei „Plus mal Minus“ bleibt nur die **Differenz der Quadrate**.

Häufiger Fehler

$(a + b)^2$ ist **nicht** $a^2 + b^2$! Das mittlere Glied $2ab$ darf niemals vergessen werden. Prüfe zur Kontrolle mit Zahlen: $(2 + 3)^2 = 25$, aber $2^2 + 3^2 = 13$.

2. Klammern mit der passenden Formel ausmultiplizieren

Ausmultiplizieren bedeutet: Du löst die Klammer auf und schreibst den Term ohne Klammer. Der erste Schritt ist immer, zu **erkennen, welche der drei Formeln** vorliegt. Danach setzt du in das passende Muster ein.

So gehst du Schritt für Schritt vor:

1. **Formel erkennen:** Steht ein Quadrat mit + (1. Formel), mit – (2. Formel) oder ein Produkt „Plus mal Minus“ (3. Formel)?
2. **a und b bestimmen:** Was ist das erste, was das zweite Glied?
3. **In die Formel einsetzen** und jedes Glied berechnen.
4. **Zusammenfassen** und ordentlich aufschreiben.

Alle drei Formeln angewendet

1. Formel:

$$(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

2. Formel:

$$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

3. Formel:

$$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$$

AUSGANGSKLAMMER	PASSENDE FORMEL	ERGEBNIS
$(x + 3)^2$	1.	$x^2 + 6x + 9$
$(x - 3)^2$	2.	$x^2 - 6x + 9$
$(x + 3)(x - 3)$	3.	$x^2 - 9$

Hinweis

Die Reihenfolge der Faktoren spielt bei der 3. Formel keine Rolle: $(x + 7)(x - 7)$ und $(x - 7)(x + 7)$ ergeben beide $x^2 - 49$.

3. Terme mit Zahlen und Variablen (auch $2x$, $3ab$) einsetzen

Für a und b darf nicht nur ein einzelner Buchstabe stehen, sondern auch ein ganzes Glied wie $2x$ oder $3ab$. Wichtig ist dann: Du musst **das ganze Glied quadrieren**, also Zahl **und** Variable. Setze das Glied deshalb beim Rechnen ruhig in eine Klammer.

- $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$ — die Zahl 2 wird **mit** quadriert, nicht nur das x .
- $(3ab)^2 = 3^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = 9a^2b^2$ — jeder Faktor wird quadriert.
- Beim doppelten Produkt multiplizierst du beide Glieder komplett miteinander.

Zusammengesetzte Glieder

1. Formel mit $2x$:

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

2. Formel mit $5a$:

$$(5a - 1)^2 = (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 1 + 1^2 = 25a^2 - 10a + 1$$

3. Formel mit $3ab$:

$$(3ab + 2)(3ab - 2) = (3ab)^2 - 2^2 = 9a^2b^2 - 4$$

GLIED	QUADRIERT	HÄUFIGER FEHLER
$2x$	$4x^2$	$2x^2$ (Zahl vergessen)
$3y$	$9y^2$	$3y^2$
$3ab$	$9a^2b^2$	$3ab^2$
$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{4}x^2$	$\frac{1}{2}x^2$

⚠ Vorsicht bei $(2x)^2$

Die Hochzahl gilt für **alles in der Klammer**. Wer nur das x quadriert und $2x^2$ schreibt, macht den häufigsten Fehler dieses Kapitels. Also: erst Klammer, dann quadrieren.

4. Rückwärts – einen Term als Binom faktorisieren

Faktorisieren heißt, einen ausmultiplizierten Term wieder in eine Klammer (ein Produkt) zu verwandeln. Du liest die binomischen Formeln also **rückwärts**. Das gelingt, wenn du an einem Term die typische Struktur erkennst: zwei Quadratzahlen und dazu passend ein doppeltes Produkt.

So erkennst du die passende Rückwärtsformel:

1. **Sind es drei Glieder?** Prüfe, ob das erste und das letzte Glied Quadrate sind (a^2 und b^2). Passt das mittlere Glied zu $2ab$? $\rightarrow$ 1. oder 2. Formel.
2. **Sind es zwei Glieder mit Minus dazwischen?** Zwei Quadrate, verbunden durch ein Minuszeichen $\rightarrow$ 3. Formel: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
3. **Vorzeichen prüfen:** mittleres Glied $+$ $\rightarrow (a + b)^2$, mittleres Glied $-$ $\rightarrow (a - b)^2$.

🧪 Rückwärts angewendet

Drei Glieder, Plus:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Drei Glieder, Minus:

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$$

Differenz zweier Quadrate:

$$x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$$

TERM	A	B	KONTROLLE MITTELGLIED	FAKTORISIERUNG
$x^2 + 14x + 49$	x	7	$2 \cdot x \cdot 7 = 14x \checkmark$	$(x + 7)^2$
$x^2 - 8x + 16$	x	4	$2 \cdot x \cdot 4 = 8x \checkmark$	$(x - 4)^2$
$4x^2 - 9$	$2x$	3	keins (nur 2 Glieder)	$(2x + 3)(2x - 3)$

Merksatz

Erst Wurzeln ziehen, dann Mittelglied prüfen. Zieh aus dem ersten und letzten Glied die Wurzel (a und b) und teste, ob $2ab$ wirklich das mittlere Glied ergibt. Nur dann ist es ein echtes Binom.

5. Terme mit binomischen Formeln vereinfachen

Oft musst du mehrere Klammern zuerst ausmultiplizieren und dann **zusammenfassen**. Dabei helfen dir die binomischen Formeln, jede Klammer schnell aufzulösen. Achte danach besonders auf die Vorzeichen, wenn eine Klammer subtrahiert wird.

So gehst du vor:

1. Jede Klammer einzeln mit der passenden Formel ausmultiplizieren.
2. Minuszeichen vor einer Klammer auf **alle** Glieder verteilen.
3. Gleichartige Glieder zusammenfassen.

Zwei Binome verrechnen

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2$$

Zuerst beide Klammern ausmultiplizieren:

$$= (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9)$$

Minuszeichen auf die zweite Klammer verteilen:

$$= x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9$$

Zusammenfassen:

$$= 12x$$

Mit der 3. Formel abkürzen

$$(x + 5)(x - 5) + 25 = x^2 - 25 + 25 = x^2$$

Klammer-Minus

Steht ein Minus vor einer Klammer, ändert sich **jedes** Vorzeichen darin. Aus $-(x^2 - 6x + 9)$ wird $-x^2 + 6x - 9$. Ein vergessenes Vorzeichen ist hier der typischste Punktverlust.

6. Vorzeichen bei der zweiten und dritten Formel richtig setzen

Die meisten Fehler entstehen bei den Vorzeichen. Bei der **2. Formel** ist nur das mittlere Glied negativ — das letzte Glied bleibt **immer positiv**, weil ein Quadrat nie negativ wird. Bei der **3. Formel** entsteht durch $+b \cdot (-b)$ genau ein Minus, deshalb steht dort $a^2 - b^2$.

AUSDRUCK	ERGEBNIS	WARUM
$(a - b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	b^2 ist positiv, denn $(-b)^2 = +b^2$
$(a + b)(a - b)$	$a^2 - b^2$	$+ab$ und $-ab$ heben sich auf, es bleibt $-b^2$
$(-a + b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	gleich wie $(b - a)^2$

- Das **letzte Glied** der 1. und 2. Formel ist immer $+b^2$ — egal ob in der Klammer ein Plus oder Minus steht.
- Bei der 2. Formel ist **nur das doppelte Produkt** negativ.
- Bei der 3. Formel merkst du dir: **Plus mal Minus ergibt Minus**, daher $a^2 - b^2$.

Merksatz

Quadrate sind nie negativ. $(-3)^2 = 9$, nicht -9 . Deshalb endet jede quadrierte Klammer mit einem **Pluszeichen** vor dem letzten Glied.

Achtung

Verwechsle nicht $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ mit $a^2 - b^2$. Das erste hat **drei** Glieder, das zweite ist die 3. Formel mit nur **zwei** Gliedern.

7. Die Formeln beim Kopfrechnen nutzen

Mit den binomischen Formeln kannst du Rechnungen im Kopf lösen, die sonst schriftlich nötig wären. Der Trick: Du zerlegst eine Zahl in eine **runde Zahl plus/minus einen kleinen Rest**, zum Beispiel $31 = 30 + 1$. So werden aus schweren Multiplikationen leichte Quadrate.

Quadratzahlen mit der 1. oder 2. Formel:

🧪 31^2 mit der 1. Formel

$$31^2 = (30 + 1)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 + 60 + 1 = 961$$

🧪 29^2 mit der 2. Formel

$$29^2 = (30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$$

Produkte „nah beieinander“ mit der 3. Formel:

🧪 $29 \cdot 31$ mit der 3. Formel

Beide Zahlen liegen symmetrisch um 30:

$$29 \cdot 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$$

AUFGABE	ZERLEGUNG	FORMEL	ERGEBNIS
21^2	$(20 + 1)^2$	1.	$400 + 40 + 1 = 441$
19^2	$(20 - 1)^2$	2.	$400 - 40 + 1 = 361$
102^2	$(100 + 2)^2$	1.	$10000 + 400 + 4 = 10404$
$48 \cdot 52$	$(50 - 2)(50 + 2)$	3.	$2500 - 4 = 2496$

💡 **Merksatz**

Runde Zahl suchen, dann Formel wählen. Für ein Quadrat nimmst du die 1. oder 2. Formel, für „zwei Zahlen gleich weit von einer runden Zahl entfernt“ die 3. Formel.

Glossar

BEGRIFF	DEFINITION
Ausmultiplizieren	Eine Klammer auflösen und den Term ohne Klammer schreiben.
Binom	Ein Term aus genau zwei Gliedern, z. B. $a + b$ oder $a - b$.
Binomische Formel	Eine der drei festen Formeln zum schnellen Ausmultiplizieren bzw. Faktorisieren von Binomen.
Differenz der Quadrate	Ergebnis der 3. binomischen Formel: $a^2 - b^2$.
Doppeltes Produkt	Das mittlere Glied $2ab$ in der 1. und 2. Formel.
Faktorisieren	Einen Term rückwärts in ein Produkt (eine Klammer) umwandeln.
Glied	Ein durch $+$ oder $-$ abgetrennter Teil eines Terms.
Quadrieren	Mit sich selbst multiplizieren, also hoch 2 nehmen.
Term	Ein sinnvoller mathematischer Ausdruck aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen.
Variable	Ein Platzhalter (Buchstabe) für eine Zahl.
Vereinfachen	Einen Term durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen kürzer schreiben.

FAQ — typische Prüfungsfragen

Wie lauten die drei binomischen Formeln?

Die drei binomischen Formeln lauten: erstens $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, zweitens $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und drittens $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Die ersten beiden unterscheiden sich nur im Vorzeichen des mittleren Gliedes. Bei der dritten Formel fällt das mittlere Glied weg, weil sich $+ab$ und $-ab$ aufheben.

Warum ist $(a + b)^2$ nicht gleich $a^2 + b^2$?

$(a + b)^2$ bedeutet $(a + b) \cdot (a + b)$, und beim Ausmultiplizieren entsteht zusätzlich das doppelte Produkt $2ab$. Deshalb ist das richtige Ergebnis $a^2 + 2ab + b^2$. Zur Kontrolle mit Zahlen: $(2 + 3)^2 = 25$, während $2^2 + 3^2$ nur 13 ergibt. Das zeigt, dass das mittlere Glied unbedingt dazugehört.

Wie erkenne ich, welche binomische Formel ich anwenden muss?

Du achtest auf die Struktur der Aufgabe. Steht ein Quadrat mit einem Pluszeichen in der Klammer, nimmst du die 1. Formel; steht ein Minuszeichen, die 2. Formel. Steht ein Produkt aus „Summe mal Differenz derselben Glieder“, also $(a + b)(a - b)$, verwendest du die 3. Formel. Beim Faktorisieren schaust du umgekehrt, ob zwei Quadrate und ein passendes doppeltes Produkt vorliegen.

Wie quadriere ich ein Glied wie $2x$ oder $3ab$?

Du quadrierst das **ganze** Glied, also Zahl und Variable zusammen. Für $2x$ gilt $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$, für $3ab$ gilt $(3ab)^2 = 9a^2b^2$. Der häufigste Fehler ist, nur die Variable zu quadrieren und die Zahl zu vergessen. Setze das Glied deshalb sicherheitshalber in eine Klammer, bevor du quadrierst.

Was bedeutet Faktorisieren mit binomischen Formeln?

Faktorisieren heißt, einen ausmultiplizierten Term wieder in eine Klammer zu verwandeln, also die Formel rückwärts zu lesen. Aus $x^2 + 10x + 25$ wird zum Beispiel $(x + 5)^2$. Dazu ziehst du aus dem ersten und letzten Glied die Wurzel und prüfst, ob das doppelte Produkt genau dem mittleren Glied entspricht.

Wie faktoriere ich $x^2 - 49$?

$x^2 - 49$ ist eine Differenz zweier Quadrate, denn $x^2 = x \cdot x$ und $49 = 7^2$. Deshalb wendest du die 3. binomische Formel rückwärts an und erhältst $(x + 7)(x - 7)$. Zur Probe kannst du wieder ausmultiplizieren: $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$.

Warum ist das letzte Glied bei $(a - b)^2$ positiv?

Das letzte Glied entsteht durch $(-b)^2$, und ein Quadrat ist niemals negativ, weil Minus mal Minus Plus ergibt. Deshalb ist $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ mit einem **positiven** b^2 . Nur das doppelte Produkt in der Mitte ist negativ.

Wie berechne ich 31^2 im Kopf?

Du zerlegst 31 in $30 + 1$ und wendest die 1. binomische Formel an: $(30 + 1)^2 = 900 + 60 + 1 = 961$. Der Vorteil ist, dass 30^2 , das doppelte Produkt $2 \cdot 30 \cdot 1$ und 1^2 im Kopf leicht zu rechnen sind. So sparst du dir die schriftliche Multiplikation.

Wie rechne ich $29 \cdot 31$ geschickt?

Beide Zahlen liegen gleich weit von der runden Zahl 30 entfernt, nämlich $30 - 1$ und $30 + 1$. Deshalb passt die 3. binomische Formel: $(30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$. Immer wenn zwei Faktoren symmetrisch um eine runde Zahl liegen, ist die 3. Formel die schnellste Methode.

Was muss ich beim Minuszeichen vor einer Klammer beachten?

Ein Minuszeichen vor einer Klammer kehrt das Vorzeichen **jedes** Gliedes in der Klammer um. Aus $-(x^2 - 6x + 9)$ wird also $-x^2 + 6x - 9$. Wer nur das erste Vorzeichen ändert, macht einen der häufigsten Fehler beim Vereinfachen. Verteile das Minus deshalb bewusst auf alle Glieder.