

Lineare Funktionen – Lernzettel

Mathe · Klasse 8 · 8 Kapitel · Glossar · Prüfungsfragen

Lineare Funktionen beschreiben Zusammenhänge, die man als Gerade zeichnen kann — vom Handytarif bis zur zurückgelegten Wegstrecke. Nach dem Durcharbeiten weißt du, was eine Funktion ist, kannst die Gleichung $y = m \cdot x + b$ lesen, zeichnen, aus Graphen und Punkten bestimmen, Nullstellen und Schnittpunkte berechnen und Sachaufgaben lösen.

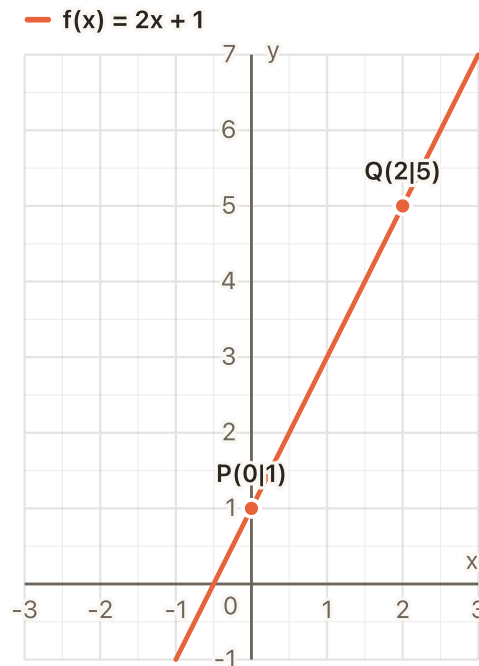
1. Was eine Funktion ist: Zuordnung, Wertetabelle, Graph

Eine **Funktion** ist eine eindeutige Zuordnung: Jedem x -Wert wird genau ein y -Wert zugeordnet. Du kannst dieselbe Funktion auf drei Arten darstellen — als Zuordnungsvorschrift (Gleichung), als **Wertetabelle** und als **Graph**. Alle drei zeigen denselben Zusammenhang, nur in unterschiedlicher Form.

- Der **x -Wert** heißt unabhängige Variable (Eingabe), der **y -Wert** heißt abhängige Variable (Ausgabe).
- Man schreibt statt y oft $f(x)$; $f(2)$ bedeutet „der y -Wert an der Stelle $x = 2$ “.
- Wichtig: Zu jedem x -Wert darf es **nur einen** y -Wert geben — sonst ist es keine Funktion.
- Eine Wertetabelle entsteht, indem du x -Werte einsetzt und die zugehörigen y -Werte ausrechnest.

Beispiel für $f(x) = 2x + 1$:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 1$	-3	-1	1	3	5



Jeder Tabellenwert wird zu einem Punkt — verbunden ergeben sie die Gerade

💡 Merksatz

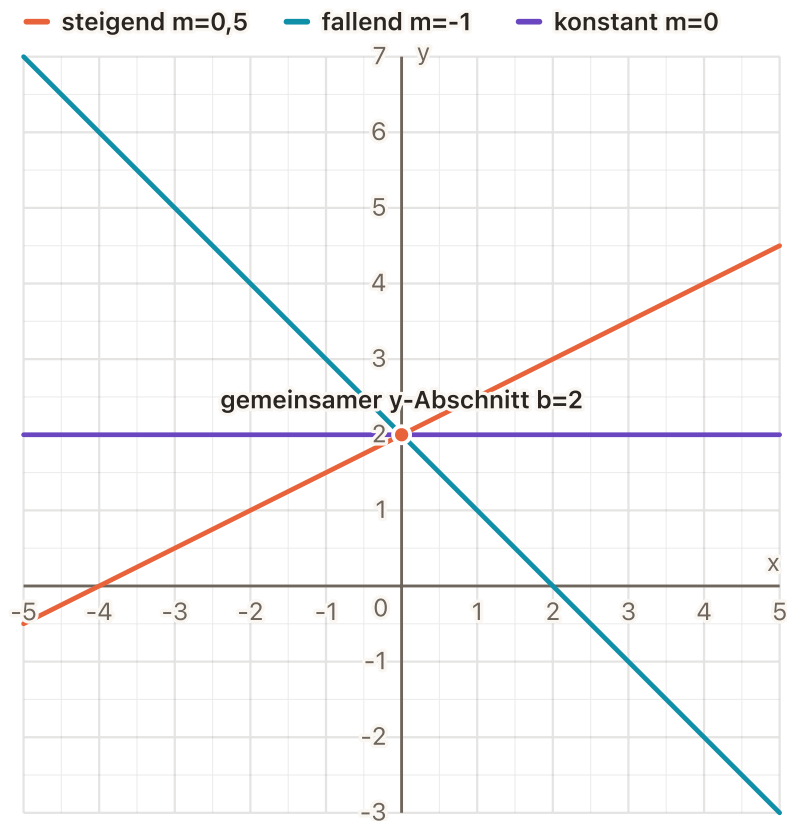
Funktion = eindeutige Zuordnung: Jedem x-Wert genau ein y-Wert. Gleichung, Wertetabelle und Graph sind drei Sichtweisen auf denselben Zusammenhang.

DARSTELLUNG	WAS SIE ZEIGT	VORTEIL
Gleichung	die Rechengvorschrift $y = mx + b$	kompakt, für jeden x-Wert nutzbar
Wertetabelle	einzelne Wertepaare $(x \mid y)$	leicht zu berechnen, zum Zeichnen
Graph	Gerade im Koordinatensystem	Verlauf auf einen Blick sichtbar

2. Die Funktionsgleichung $y = m \cdot x + b$: Steigung und y-Achsenabschnitt

Jede lineare Funktion hat die Form $y = m \cdot x + b$. Die beiden Zahlen m und b bestimmen die Gerade vollständig: m ist die **Steigung**, b ist der **y-Achsenabschnitt**. Kennst du beide, kannst du die Gerade sofort zeichnen.

- Die **Steigung** m gibt an, um wie viel y steigt (oder fällt), wenn x um 1 größer wird.
- Der **y-Achsenabschnitt** b ist der y -Wert an der Stelle $x = 0$ — dort schneidet die Gerade die y -Achse.
- Ist $m > 0$, steigt die Gerade; ist $m < 0$, fällt sie; ist $m = 0$, ist sie waagrecht.
- Man berechnet die Steigung mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Höhenunterschied durch waagerechten Abstand).



Alle drei haben $b = 2$, unterscheiden sich aber in der Steigung m

🔔 Merksatz

In $y = mx + b$ ist m die Steigung (Anstieg pro Schritt nach rechts) und b der y-Achsenabschnitt (Wert bei $x = 0$).

WERT VON m	VERLAUF DER GERADEN
$m > 0$	steigt von links unten nach rechts oben
$m < 0$	fällt von links oben nach rechts unten
$m = 0$	waagerechte Gerade $y = b$
großes $ m $	steile Gerade
kleines $ m $	flache Gerade

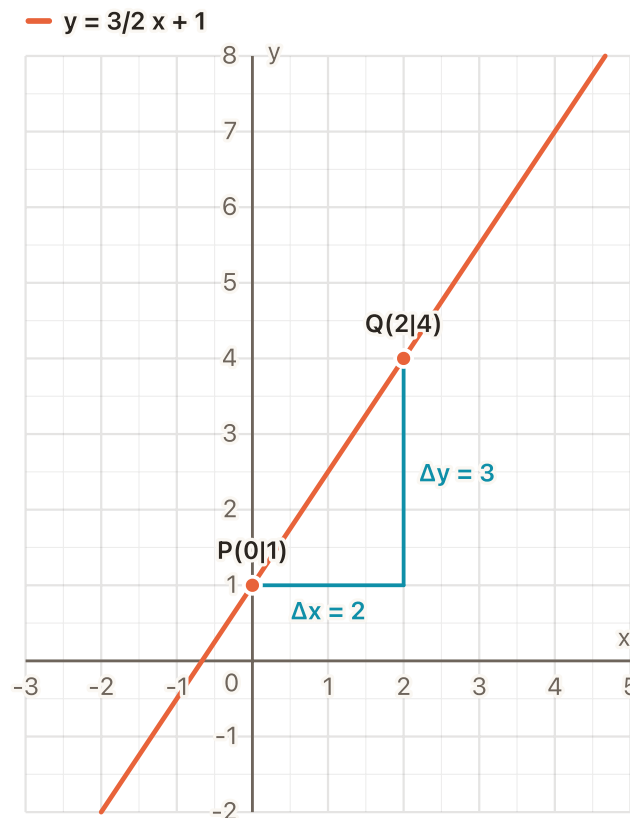
3. Geraden mit dem Steigungsdreieck zeichnen

Eine Gerade zeichnest du am schnellsten mit dem **Steigungsdreieck**. Du beginnst beim y-Achsenabschnitt b und trägst dann die Steigung m als Dreieck ab. Zwei Punkte reichen, um die Gerade zu ziehen.

Schreibe die Steigung als Bruch $m = \frac{\text{hoch}}{\text{rechts}}$. Bei $m = \frac{3}{2}$ gehst du also 2 nach rechts und 3 nach oben.

Schritt für Schritt für $y = \frac{3}{2}x + 1$:

1. Punkt auf der y-Achse einzeichnen: $b = 1$, also $P(0 \mid 1)$.
2. Von P aus **2 nach rechts** gehen (Nenner von m).
3. Dann **3 nach oben** gehen (Zähler von m) — dort liegt der zweite Punkt $Q(2 \mid 4)$.
4. Beide Punkte mit dem Lineal zu einer Geraden verbinden.



Steigungsdreieck: von P aus 2 nach rechts ($\Delta x = 2$), 3 nach oben ($\Delta y = 3$) zu Q

⚠ Häufiger Fehler

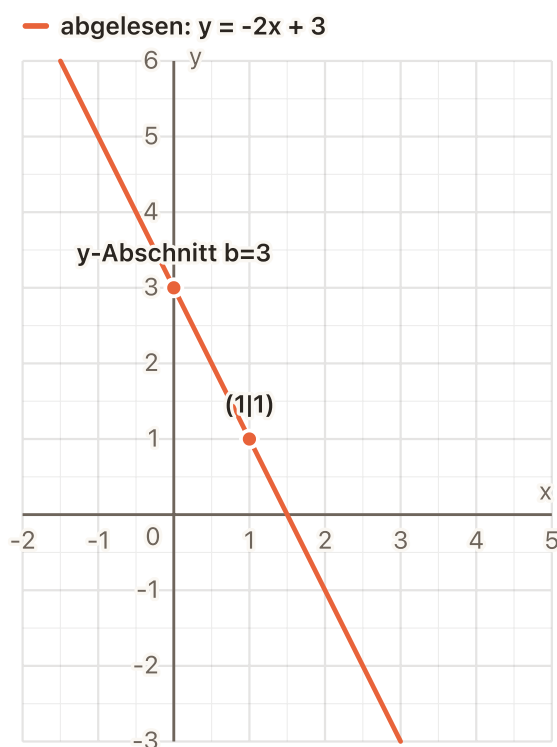
Bei negativer Steigung wie $m = -\frac{2}{3}$ gehst du 3 nach rechts und dann **2 nach unten**. Das Minuszeichen gehört zur Richtung, nicht zum Nenner. Verwechsle außerdem nie Zähler (hoch) und Nenner (rechts).

4. Die Funktionsgleichung aus dem Graphen ablesen

Aus einer gezeichneten Geraden kannst du die Gleichung $y = mx + b$ ablesen. Du bestimmst zuerst b am Schnittpunkt mit der y-Achse und dann m mit einem Steigungsdreieck an zwei gut ablesbaren Gitterpunkten.

Schritt für Schritt:

1. Suche den Schnittpunkt mit der y-Achse — sein y-Wert ist b .
2. Wähle zwei Punkte auf der Geraden, die genau auf Gitterkreuzungen liegen.
3. Zeichne das Steigungsdreieck und lies Δx (rechts) und Δy (hoch) ab.
4. Berechne $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und setze beide Werte in $y = mx + b$ ein.



$b = 3$ an der y-Achse; von $x=0$ bis $x=1$ fällt y um 2, also $m = -2$

Beispiel

An der Geraden liest du ab: Schnittpunkt mit der y-Achse bei $(0 \mid 3)$, also $b = 3$. Von dort 1 nach rechts, 2 nach unten, also $m = \frac{-2}{1} = -2$. Die Gleichung lautet:

$$y = -2x + 3$$

5. Die Funktionsgleichung aus zwei Punkten bestimmen

Sind zwei Punkte $A(x_1 | y_1)$ und $B(x_2 | y_2)$ gegeben, kannst du die Gleichung berechnen. Zuerst bestimmst du die Steigung mit der Differenzenformel, danach den y-Achsenabschnitt durch Einsetzen eines Punktes.

Schritt für Schritt mit $A(1 | 3)$ und $B(4 | 9)$:

1. Steigung berechnen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

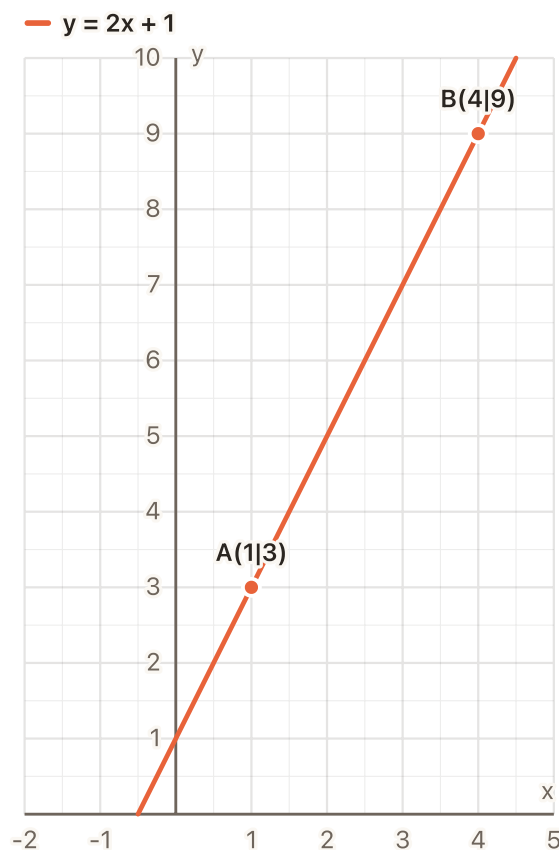
2. Einen Punkt in $y = 2x + b$ einsetzen, hier $A(1 | 3)$:

$$3 = 2 \cdot 1 + b$$

3. Nach b auflösen:

$$b = 3 - 2 = 1$$

4. Ergebnis: $y = 2x + 1$.



Durch die beiden Punkte A und B verläuft genau eine Gerade

Merksatz

Zwei Punkte $\rightarrow$ erst m mit $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dann einen Punkt einsetzen und b ausrechnen.

Reihenfolge beachten

In Zähler und Nenner müssen die Punkte in derselben Reihenfolge stehen. Rechnest du oben $y_2 - y_1$, muss unten auch $x_2 - x_1$ stehen — sonst bekommst du ein falsches Vorzeichen.

6. Nullstellen berechnen

Die **Nullstelle** ist der x -Wert, an dem die Gerade die x -Achse schneidet — dort gilt $y = 0$. Du setzt also $0 = mx + b$ und löst nach x auf. Jede lineare Funktion mit $m \neq 0$ hat genau eine Nullstelle.

Schritt für Schritt für $y = 2x - 6$:

1. $y = 0$ setzen:

$$0 = 2x - 6$$

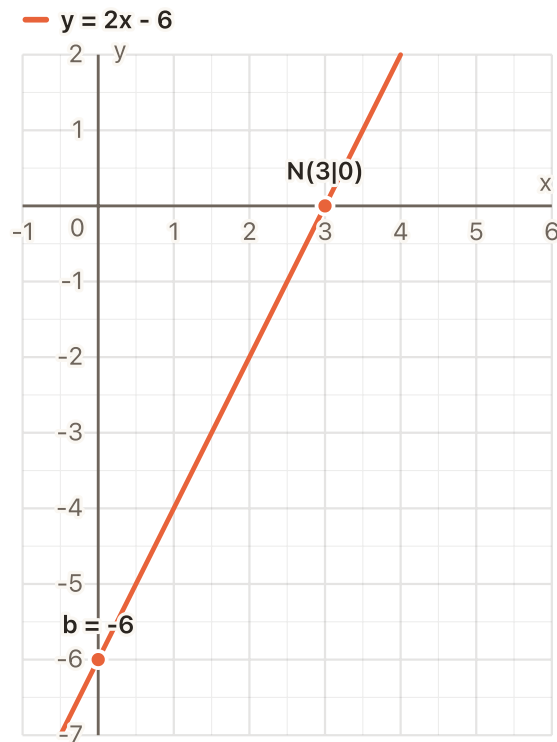
2. $+6$ auf beiden Seiten:

$$6 = 2x$$

3. Durch 2 teilen:

$$x = 3$$

Die Nullstelle liegt bei $N(3 \mid 0)$.



Bei der Nullstelle $N(3|0)$ schneidet die Gerade die x-Achse

💡 Merksatz

Nullstelle: $y = 0$ setzen und $0 = mx + b$ nach x auflösen. Es gilt $x = -\frac{b}{m}$.

📄 Unterschied merken

Der **y-Achsenabschnitt** ist der y-Wert bei $x = 0$ (Schnitt mit der y-Achse). Die **Nullstelle** ist der x-Wert bei $y = 0$ (Schnitt mit der x-Achse). Nicht verwechseln!

7. Den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen

Zwei Geraden schneiden sich im **Schnittpunkt** — dort haben sie denselben x- und denselben y-Wert. Du setzt deshalb beide Funktionsterme gleich (**Gleichsetzungsverfahren**), löst nach x auf und berechnest anschließend y .

Schritt für Schritt für $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = -x + 4$:

1. Terme gleichsetzen:

$$2x + 1 = -x + 4$$

2. $+x$ auf beiden Seiten:

$$3x + 1 = 4$$

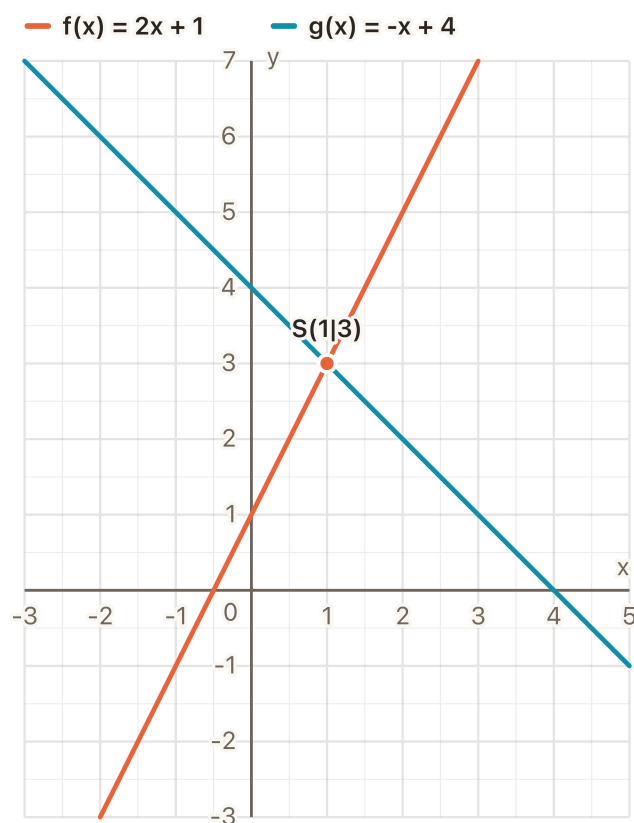
3. -1 und durch 3 teilen:

$$3x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

4. $x = 1$ in eine Gleichung einsetzen:

$$y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Der Schnittpunkt ist $S(1 \mid 3)$.



Im Schnittpunkt $S(1|3)$ haben beide Geraden denselben Wert

Merksatz

Schnittpunkt: beide Terme gleichsetzen, nach x auflösen, dann x einsetzen, um y zu erhalten. Ergebnis als Punkt $S(x \mid y)$ angeben.

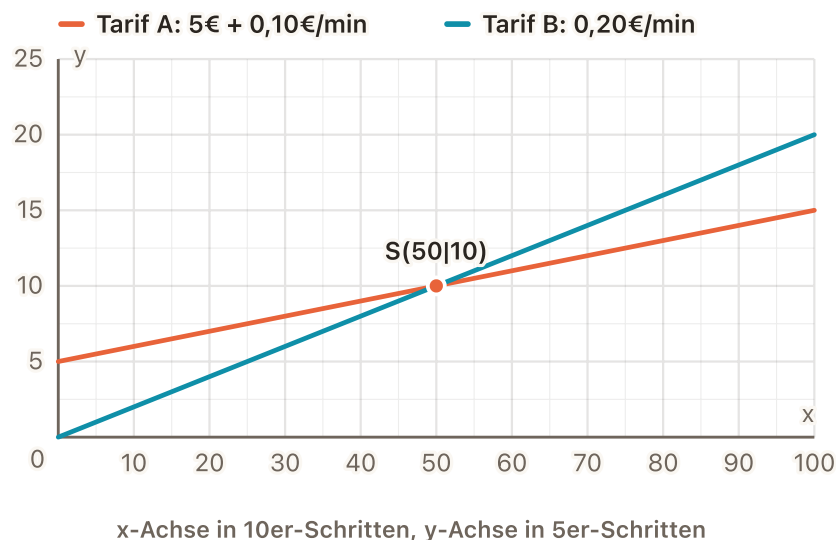
⚠ Sonderfälle

Haben beide Geraden dieselbe Steigung m , sind sie **parallel** und schneiden sich nicht (keine Lösung). Sind sie identisch, gibt es unendlich viele gemeinsame Punkte.

8. Proportionale Funktionen und Anwendungsaufgaben (Handytarife, Wege)

Eine **proportionale Funktion** ist ein Sonderfall der linearen Funktion mit $b = 0$: $y = m \cdot x$. Ihr Graph ist eine Gerade **durch den Ursprung** ($0 \mid 0$). In Sachaufgaben ist m oft ein „pro“-Wert (Preis pro Minute, Geschwindigkeit pro Stunde) und b eine feste Grundgebühr oder ein Startwert.

- Bei proportionalen Größen gilt: doppelter x-Wert $\rightarrow$ doppelter y-Wert. Der Quotient $\frac{y}{x} = m$ ist konstant.
- Bei **Handytarifen** ist b die monatliche Grundgebühr und m der Preis pro Minute: $\text{Kosten} = m \cdot x + b$.
- Bei **Wege** ist b ein Startvorsprung (schon zurückgelegte Strecke) und m die Geschwindigkeit: $\text{Strecke} = v \cdot t + s_0$.
- Zwei Tarife vergleichst du, indem du ihre Kostengeraden schneidest — der Schnittpunkt zeigt, ab wann sich welcher lohnt.



Bei 50 Minuten kosten beide Tarife 10 €. Bei mehr als 50 Minuten ist Tarif A (mit Grundgebühr) günstiger

Handytarif-Vergleich

Tarif A: $y = 0,1x + 5$ (Grundgebühr 5 €, 0,10 € pro Minute). Tarif B: $y = 0,2x$ (keine Grundgebühr, 0,20 € pro Minute, proportional). Gleichsetzen:

$$0,1x + 5 = 0,2x$$

$$5 = 0,1x \quad \Rightarrow \quad x = 50$$

Bei 50 Minuten kosten beide gleich viel (10 €). Wer mehr telefoniert, fährt mit Tarif A günstiger.

MERKMAL	PROPORTIONAL $Y = MX$	ALLGEMEIN LINEAR $Y = MX + B$
y-Achsenabschnitt	$b = 0$	b beliebig
Graph geht durch	Ursprung $(0 \mid 0)$	Punkt $(0 \mid b)$
Quotient y/x	konstant = m	nicht konstant
Beispiel	Tarif ohne Grundgebühr	Tarif mit Grundgebühr

Merksatz

Proportional heißt: Gerade durch den Ursprung, $b = 0$, konstanter Quotient $\frac{y}{x} = m$. Jede proportionale Funktion ist linear, aber nicht jede lineare ist proportional.

Glossar

BEGRIFF	DEFINITION
Abhängige Variable	Der y-Wert (Ausgabe), der sich aus dem x-Wert ergibt.
Funktion	Eindeutige Zuordnung, die jedem x-Wert genau einen y-Wert zuordnet.
Gleichsetzungsverfahren	Verfahren zur Schnittpunktberechnung: beide Terme gleichsetzen und nach x auflösen.
Graph	Bildliche Darstellung einer Funktion im Koordinatensystem; bei linearen Funktionen eine Gerade.
Lineare Funktion	Funktion der Form $y = mx + b$, deren Graph eine Gerade ist.
Nullstelle	x-Wert, an dem der Graph die x-Achse schneidet; dort gilt $y = 0$.
Proportionale Funktion	Lineare Funktion mit $b = 0$: $y = mx$; Gerade durch den Ursprung.

BEGRIFF	DEFINITION
Schnittpunkt	Punkt, in dem zwei Geraden denselben x- und y-Wert haben.
Steigung m	Änderung von y , wenn x um 1 wächst; $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Steigungsdreieck	Rechtwinkliges Dreieck an der Geraden zum Ablesen und Zeichnen der Steigung.
Unabhängige Variable	Der x-Wert (Eingabe), den man frei wählt.
Wertetabelle	Tabelle mit zusammengehörigen Wertepaaren $(x \mid y)$.
y-Achsenabschnitt b	y-Wert bei $x = 0$; dort schneidet die Gerade die y-Achse.

FAQ — typische Prüfungsfragen

Was ist eine Funktion?

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, bei der jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird. Der x-Wert ist die unabhängige Variable (Eingabe), der y-Wert die abhängige Variable (Ausgabe). Man kann eine Funktion als Gleichung, als Wertetabelle oder als Graph darstellen. Entscheidend ist die Eindeutigkeit: Zu einem x-Wert darf es niemals zwei verschiedene y-Werte geben.

Was bedeuten m und b in $y = m \cdot x + b$?

In der Gleichung $y = mx + b$ ist m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt. Die Steigung m gibt an, um wie viel y steigt oder fällt, wenn x um 1 größer wird. Der y-Achsenabschnitt b ist der y-Wert an der Stelle $x = 0$, also dort, wo die Gerade die y-Achse schneidet. Zusammen legen m und b die Gerade eindeutig fest.

Wie berechnet man die Steigung aus zwei Punkten?

Die Steigung berechnet man mit der Differenzenformel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Man teilt also den Höhenunterschied Δy durch den waagerechten Abstand Δx . Wichtig ist, dass die Punkte in Zähler und Nenner in derselben Reihenfolge stehen. Zum Beispiel ergibt sich bei $A(1 \mid 3)$ und $B(4 \mid 9)$ die Steigung $m = \frac{9-3}{4-1} = 2$.

Wie zeichnet man eine Gerade mit dem Steigungsdreieck?

Man beginnt beim y-Achsenabschnitt b und markiert dort den ersten Punkt auf der y-Achse. Dann schreibt man die Steigung als Bruch $m = \frac{\text{hoch}}{\text{rechts}}$ und trägt vom Punkt aus zuerst die Schritte nach rechts (Nenner) und dann nach oben oder unten (Zähler) ab. Der so erreichte zweite Punkt wird mit dem ersten zu einer Geraden verbunden. Bei negativer Steigung geht man statt nach oben nach unten.

Wie liest man die Funktionsgleichung aus einem Graphen ab?

Zuerst liest man am Schnittpunkt mit der y-Achse den Wert b ab. Danach wählt man zwei Punkte, die genau auf Gitterkreuzungen liegen, und bestimmt mit einem Steigungsdreieck Δy und Δx , um $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu berechnen. Beide Werte setzt man in $y = mx + b$ ein. So erhält man aus $b = 3$ und $m = -2$ die Gleichung $y = -2x + 3$.

Wie bestimmt man die Gleichung aus zwei Punkten?

Man berechnet zuerst die Steigung mit $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Anschließend setzt man einen der beiden Punkte in die Gleichung $y = mx + b$ ein und löst nach b auf. Zum Schluss schreibt man die vollständige Gleichung mit den gefundenen Werten für m und b auf. Dieses Verfahren funktioniert für jede lineare Funktion, deren zwei Punkte verschiedene x-Werte haben.

Wie berechnet man die Nullstelle?

Die Nullstelle ist der x-Wert, an dem die Gerade die x-Achse schneidet; dort gilt $y = 0$. Man setzt deshalb $0 = mx + b$ und löst die Gleichung nach x auf, was $x = -\frac{b}{m}$ ergibt. Zum Beispiel führt $0 = 2x - 6$ auf $x = 3$, die Nullstelle ist also $N(3 \mid 0)$. Eine lineare Funktion mit $m \neq 0$ hat genau eine Nullstelle.

Wie berechnet man den Schnittpunkt zweier Geraden?

Man setzt die beiden Funktionsterme gleich, weil sich die Geraden dort treffen, wo sie denselben y-Wert haben (Gleichsetzungsverfahren). Diese Gleichung löst man nach x auf und setzt das Ergebnis in eine der beiden Funktionen ein, um den zugehörigen y-Wert zu erhalten. Das Ergebnis gibt man als Punkt $S(x \mid y)$ an. Bei $2x + 1 = -x + 4$ ergibt sich $x = 1$ und $y = 3$, also $S(1 \mid 3)$.

Was ist der Unterschied zwischen Nullstelle und y-Achsenabschnitt?

Der y-Achsenabschnitt ist der y-Wert an der Stelle $x = 0$ und beschreibt den Schnittpunkt mit der y-Achse. Die Nullstelle dagegen ist der x-Wert an der Stelle $y = 0$ und beschreibt den Schnittpunkt mit der x-Achse. Beide beschreiben also Schnittpunkte mit einer Achse, aber mit unterschiedlichen Achsen. Verwechseln ist ein häufiger Fehler, deshalb hilft die Faustregel: „ b auf der y-Achse, Nullstelle auf der x-Achse“.

Was ist eine proportionale Funktion?

Eine proportionale Funktion ist eine lineare Funktion mit dem y-Achsenabschnitt $b = 0$, also $y = m \cdot x$. Ihr Graph ist eine Gerade, die durch den Ursprung $(0 \mid 0)$ verläuft. Der Quotient $\frac{y}{x}$ ist bei ihr immer konstant und gleich m . Jede proportionale Funktion ist auch linear, aber nur die linearen Funktionen ohne Grundwert b sind proportional.

Wie vergleicht man zwei Handytarife mit linearen Funktionen?

Man stellt für jeden Tarif eine Kostengleichung der Form $\text{Kosten} = m \cdot x + b$ auf, wobei b die Grundgebühr und m der Preis pro Minute ist. Dann setzt man beide Gleichungen gleich und berechnet den Schnittpunkt. Der x-Wert des Schnittpunkts sagt, bei welcher Minutenzahl beide Tarife gleich viel

kosten. Für kleinere Zeiten ist der Tarif mit weniger Grundgebühr günstiger, für größere Zeiten der mit geringerem Minutenpreis.

Woran erkennt man, ob zwei Geraden parallel sind?

Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie dieselbe Steigung m haben, sich im y-Achsenabschnitt b aber unterscheiden. Sie verlaufen dann gleich steil und schneiden sich nie, das Gleichsetzungsverfahren liefert keine Lösung. Stimmen dagegen m und b beide überein, sind die Geraden identisch und haben unendlich viele gemeinsame Punkte. Nur bei unterschiedlichen Steigungen gibt es genau einen Schnittpunkt.