

Lineare Gleichungssysteme – Lernzettel

Mathe · Klasse 9 · 8 Kapitel · Glossar · Prüfungsfragen

Ein lineares Gleichungssystem (kurz **LGS**) besteht aus zwei Gleichungen mit denselben zwei Variablen x und y . In diesem Material lernst du, was die Lösung eines solchen Systems bedeutet, wie du sie zeichnerisch und mit drei Rechenverfahren findest, wie du Sonderfälle erkennst und wie du Textaufgaben in ein LGS übersetzt. Nach dem Durcharbeiten kannst du sicher entscheiden, welches Verfahren am schnellsten zum Ziel führt.

1. Lineare Gleichungen mit zwei Variablen und ihre Lösungsmenge

Eine **lineare Gleichung mit zwei Variablen** hat die Form $a \cdot x + b \cdot y = c$. Anders als bei einer Gleichung mit nur einer Variablen gibt es hier nicht eine einzelne Lösung, sondern unendlich viele Zahlenpaare $(x \mid y)$, die die Gleichung erfüllen. Alle diese Paare liegen zusammen auf einer **Geraden**, wenn man sie in ein Koordinatensystem einträgt.

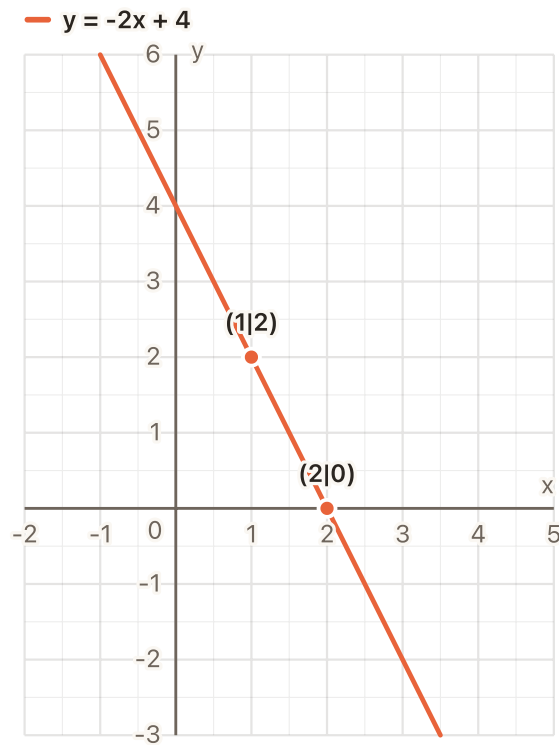
- Ein Zahlenpaar $(x \mid y)$ ist genau dann eine Lösung, wenn beim Einsetzen beider Werte eine wahre Aussage entsteht.
- Löst man die Gleichung nach y auf, erhält man die **Normalform einer Geraden** $y = m \cdot x + n$ mit Steigung m und y -Achsenabschnitt n .
- Die Lösungsmenge einer einzelnen linearen Gleichung mit zwei Variablen ist unendlich groß — deshalb braucht man eine **zweite Gleichung**, um genau ein Paar festzulegen.

Von der Gleichung zur Geraden

Gegeben ist $2x + y = 4$. Nach y aufgelöst:

$$y = -2x + 4$$

Setzt man $x = 1$ ein, ergibt sich $y = 2$. Das Paar $(1 \mid 2)$ ist also eine Lösung, denn $2 \cdot 1 + 2 = 4$ ist wahr.



Jeder Punkt der Geraden ist eine Lösung von $2x + y = 4$

💡 Merksatz

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen entspricht **einer Geraden**. Jeder Punkt der Geraden ist ein Lösungspaar, deshalb gibt es unendlich viele Lösungen.

2. Ein Gleichungssystem zeichnerisch lösen (Schnittpunkt zweier Geraden)

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus zwei Geraden. Die Lösung des Systems ist das Zahlenpaar, das **beide** Gleichungen gleichzeitig erfüllt — grafisch ist das der **Schnittpunkt** der beiden Geraden. Du zeichnest also beide Geraden in dasselbe Koordinatensystem und liest die Koordinaten des Schnittpunkts ab.

So gehst du Schritt für Schritt vor:

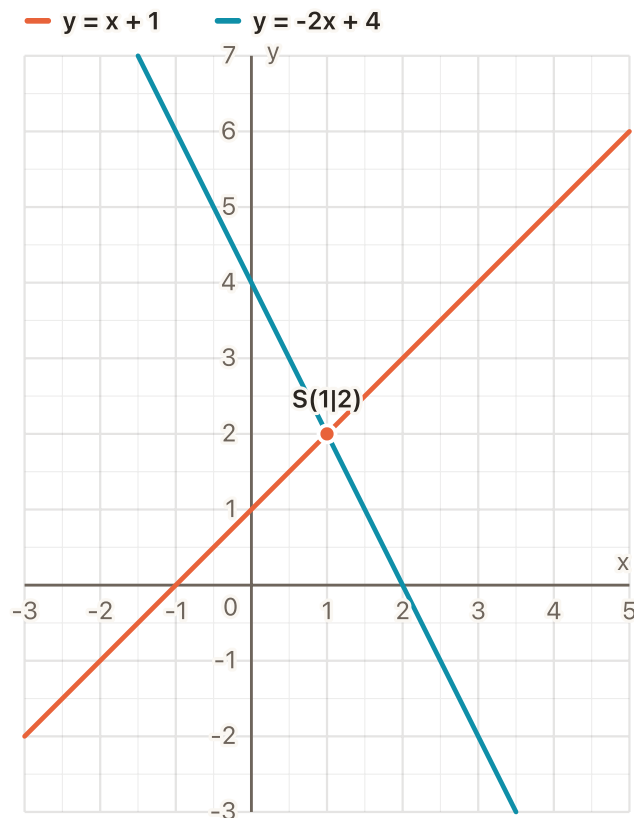
1. Löse beide Gleichungen nach y auf, damit du die Form $y = mx + n$ hast.
2. Zeichne die erste Gerade über den y -Achsenabschnitt n und die Steigung m .
3. Zeichne die zweite Gerade genauso ein.
4. Lies die Koordinaten des Schnittpunkts ab und schreibe die Lösung als Paar $(x | y)$.
5. Mache die **Probe**, indem du das Paar in beide Ausgangsgleichungen einsetzt.

Zeichnerische Lösung

Gegeben:

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = -2x + 4$$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $(1 \mid 2)$. Probe: $2 = 1 + 1$ ✓ und $2 = -2 \cdot 1 + 4$ ✓.



Der Schnittpunkt beider Geraden ist die Lösung des Gleichungssystems

Grenzen des zeichnerischen Verfahrens

Das Ablesen ist nur so genau wie deine Zeichnung. Liegt der Schnittpunkt bei krummen Werten wie $(1,37 \mid 2,84)$, kannst du ihn nicht exakt ablesen. Für genaue Lösungen brauchst du eines der Rechenverfahren aus den nächsten Abschnitten.

3. Gleichsetzungsverfahren

Beim **Gleichsetzungsverfahren** löst du beide Gleichungen nach derselben Variablen auf (meist nach y) und setzt die beiden Terme gleich. Dadurch entsteht eine Gleichung mit nur noch einer Variablen, die du lösen kannst. Dieses Verfahren ist besonders praktisch, wenn beide Gleichungen bereits nach y aufgelöst sind.

Ablauf:

1. Löse beide Gleichungen nach derselben Variablen auf.
2. Setze die beiden rechten Seiten gleich.
3. Löse die entstandene Gleichung nach der verbliebenen Variablen.
4. Setze das Ergebnis in eine der aufgelösten Gleichungen ein, um die zweite Variable zu bestimmen.
5. Schreibe die Lösung als Paar und mache die Probe.

Gleichsetzungsverfahren

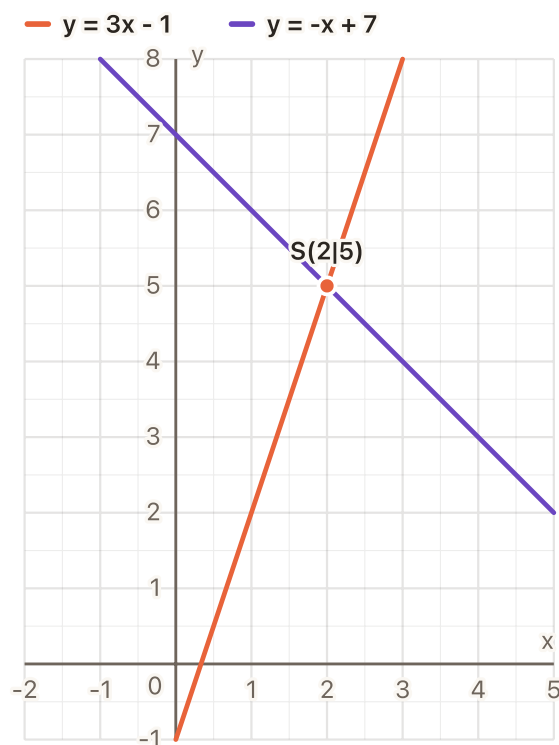
$$(I) \quad y = 3x - 1 \quad (II) \quad y = -x + 7$$

Gleichsetzen:

$$3x - 1 = -x + 7$$

$$4x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Einsetzen in (I): $y = 3 \cdot 2 - 1 = 5$. Lösung: $(2 \mid 5)$.



Gleichsetzen findet denselben Schnittpunkt rechnerisch exakt

Merksatz

Gleichsetzungsverfahren: **beide** Gleichungen nach derselben Variablen auflösen, die Terme gleichsetzen — dann bleibt nur noch eine Variable übrig.

4. Einsetzungsverfahren

Beim **Einsetzungsverfahren** löst du **eine** Gleichung nach einer Variablen auf und setzt diesen Term in die **andere** Gleichung ein. Dieses Verfahren ist ideal, wenn eine Variable bereits allein steht oder leicht freigestellt werden kann (z. B. wenn irgendwo $x =$ oder $y =$ vorkommt).

Ablauf:

1. Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf (die, die am einfachsten allein steht).
2. Setze diesen Term in die andere Gleichung ein.
3. Löse die entstandene Gleichung mit nur einer Variablen.
4. Setze das Ergebnis zurück, um die zweite Variable zu bestimmen.
5. Schreibe die Lösung als Paar und mache die Probe.

Einsetzungsverfahren

$$(I) \quad y = 2x + 1 \quad (II) \quad 3x + y = 11$$

(I) in (II) einsetzen:

$$3x + (2x + 1) = 11$$

$$5x + 1 = 11 \quad \Rightarrow \quad 5x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Einsetzen in (I): $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Lösung: $(2 \mid 5)$.

Klammer nicht vergessen

Setze einen eingesetzten Term wie $2x + 1$ am besten zunächst in **Klammern**. So behandelst du ihn als Einheit und vermeidest Vorzeichenfehler. Bei $3x + (2x + 1)$ darfst du die Plusklammer weglassen. Bei $-(2x + 1)$ musst du beim Auflösen beide Vorzeichen ändern: $-2x - 1$.

5. Additionsverfahren

Beim **Additionsverfahren** (auch Subtraktionsverfahren) bringst du beide Gleichungen so in Form, dass sich beim Addieren eine Variable **weghebt**. Dazu multiplizierst du eine oder beide Gleichungen mit einer passenden Zahl, sodass die Vorfaktoren einer Variablen entgegengesetzt gleich sind. Dieses Verfahren ist am besten, wenn beide Gleichungen in der Form $ax + by = c$ stehen.

Ablauf:

1. Ordne beide Gleichungen so, dass x -Terme, y -Terme und Zahlen jeweils untereinander stehen.
2. Multipliziere eine oder beide Gleichungen so, dass die Vorfaktoren einer Variablen entgegengesetzt gleich werden (z. B. $+2y$ und $-2y$).
3. Addiere beide Gleichungen — eine Variable fällt weg.
4. Löse nach der verbliebenen Variablen.
5. Setze zurück, bestimme die zweite Variable, schreibe das Paar und mache die Probe.

Additionsverfahren

$$(I) \quad 2x + 3y = 13 \quad (II) \quad 4x - 3y = 5$$

Die y -Terme sind schon entgegengesetzt gleich. Addieren:

$$6x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Einsetzen in (I): $2 \cdot 3 + 3y = 13 \Rightarrow 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{3}$. Lösung: $(3 \mid \frac{7}{3})$.

Wenn nichts passt

Stehen in (I) $+3x$ und in (II) $+2x$, multiplizierst du die **gesamte** Gleichung (I) mit 2 und die **gesamte** Gleichung (II) mit -3 . Dann entstehen $+6x$ und $-6x$; beim Addieren heben sie sich auf. Mit zwei positiven Faktoren müsstest du die Gleichungen stattdessen subtrahieren – mische die beiden Wege nicht.

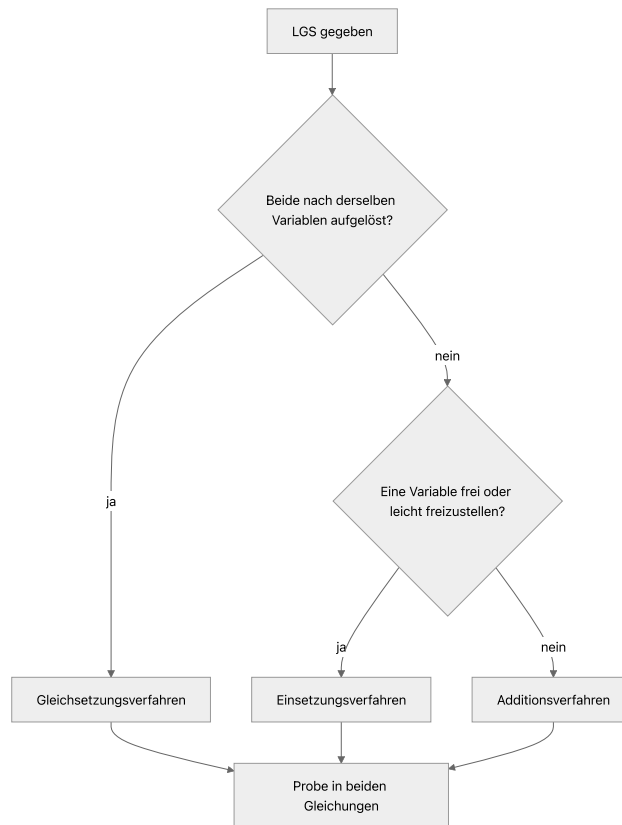
VERFAHREN	AM BESTEN GEEIGNET, WENN ...	WAS PASSIERT IM KERN
Gleichsetzung	beide Gleichungen nach y aufgelöst sind	zwei y -Terme gleichsetzen
Einsetzung	eine Variable schon allein steht	Term in andere Gleichung einsetzen
Addition	beide Gleichungen die Form $ax + by = c$ haben	Gleichungen addieren, eine Variable fällt weg

6. Das passende Verfahren wählen und die Lösung durch Einsetzen prüfen

Alle drei Rechenverfahren führen zum selben Ergebnis — sie unterscheiden sich nur im Aufwand. Du wählst das Verfahren, das bei der jeweiligen Aufgabe die wenigsten Umformungen kostet. Nach jeder

Rechnung gehört die **Probe** dazu: Du setzt das gefundene Paar in **beide** Ausgangsgleichungen ein.

- Steht eine Variable schon frei (z. B. $y = 2x + 1$), nimmst du meist das **Einsetzungsverfahren**.
- Sind beide Gleichungen nach y aufgelöst, ist das **Gleichsetzungsverfahren** am schnellsten.
- Stehen beide in der Form $ax + by = c$, ist das **Additionsverfahren** meist am einfachsten.
- Die Wahl ist eine Empfehlung, kein Zwang: Jede Aufgabe lässt sich mit jedem Verfahren lösen, manche nur mit etwas mehr Rechenarbeit.



Probe machen

Behauptete Lösung: $(2 \mid 5)$ für

$$(I) \quad y = 2x + 1 \qquad (II) \quad 3x + y = 11$$

- Probe in (I): $5 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ ✓
- Probe in (II): $3 \cdot 2 + 5 = 11$ ✓

Beide Aussagen sind wahr, also ist $(2 \mid 5)$ die richtige Lösung.

Merksatz

Die Probe zählt nur, wenn das Paar in **beide** Gleichungen eingesetzt eine wahre Aussage ergibt. Eine einzelne stimmende Gleichung reicht nicht.

7. Gleichungssysteme ohne Lösung und mit unendlich vielen Lösungen erkennen

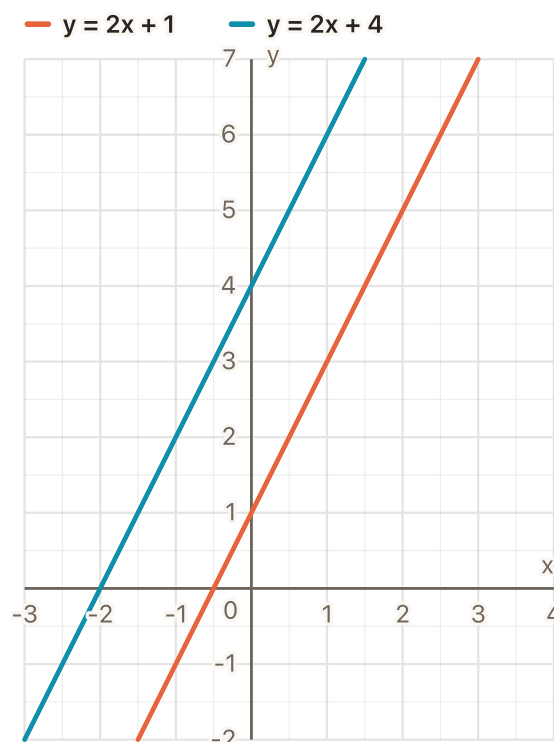
Nicht jedes LGS hat genau eine Lösung. Grafisch hängt das davon ab, wie die beiden Geraden zueinander liegen. Beim Rechnen erkennst du die Sonderfälle daran, dass am Ende **keine Variable mehr** übrig bleibt und eine reine Zahlenaussage entsteht.

FALL	GERADEN	BEIM RECHNEN ENTSTEHT	LÖSUNGSMENGE
genau eine Lösung	schneiden sich in einem Punkt	ein Wert für x (und y)	ein Paar, z. B. $\{(2 \mid 5)\}$
keine Lösung	parallel, verschieden	falsche Aussage, z. B. $0 = 4$	$\{\}$ (leere Menge)
unendlich viele Lösungen	identisch (liegen aufeinander)	wahre Aussage, z. B. $0 = 0$	unendlich viele Paare

Keine Lösung

$$(I) \quad y = 2x + 1 \quad (II) \quad y = 2x + 4$$

Gleichsetzen: $2x + 1 = 2x + 4 \Rightarrow 1 = 4$. Das ist **falsch**, also gibt es keine Lösung. Die Geraden sind parallel (gleiche Steigung 2, verschiedener y-Achsenabschnitt).



Parallele Geraden schneiden sich nie — das LGS hat keine Lösung

⚠ Gleiche Steigung genau prüfen

Zwei Geraden mit **gleicher** Steigung sind entweder parallel (keine Lösung) oder identisch (unendlich viele Lösungen). Entscheidend ist der y-Achsenabschnitt: gleich $\rightarrow$ identisch, verschieden $\rightarrow$ parallel. Nur bei **verschiedener** Steigung gibt es genau eine Lösung.

8. Textaufgaben in ein Gleichungssystem übersetzen (Alter, Preise, Zahlenrätsel)

Bei Textaufgaben musst du zuerst festlegen, wofür x und y stehen, und dann aus dem Text **zwei** Gleichungen bilden. Danach löst du das LGS mit dem passenden Verfahren und formulierst einen Antwortsatz. Achte darauf, dass am Ende alle Angaben des Textes erfüllt sind.

Ablauf:

1. Lies den Text genau und lege die Variablen fest (z. B. x = Alter des Vaters, y = Alter des Sohnes).
2. Übersetze jede Information in eine Gleichung.
3. Löse das Gleichungssystem.
4. Prüfe das Ergebnis am Text und schreibe einen Antwortsatz.

🧪 Preis-Aufgabe

3 Hefte und 2 Stifte kosten 7,00 €. 1 Heft und 4 Stifte kosten 6,00 €. Wie teuer ist ein Heft, wie teuer ein Stift?

Variablen: x = Preis eines Hefts, y = Preis eines Stifts.

$$(I) \quad 3x + 2y = 7 \quad (II) \quad x + 4y = 6$$

(II) nach x auflösen: $x = 6 - 4y$. Einsetzen in (I):

$$3(6 - 4y) + 2y = 7$$

$$18 - 12y + 2y = 7 \quad \Rightarrow \quad -10y = -11 \quad \Rightarrow \quad y = 1,10$$

Dann $x = 6 - 4 \cdot 1,10 = 1,60$. **Antwort:** Ein Heft kostet 1,60 €, ein Stift 1,10 €.

AUFGABENTYP	TYPISCHE VARIABLEN	TYPISCHE GLEICHUNGEN
Altersrätsel	Alter zweier Personen	Summe/Differenz heute, Beziehung in x Jahren
Preisaufgabe	Preis zweier Waren	zwei Einkäufe mit Gesamtpreisen
Zahlenrätsel	zwei gesuchte Zahlen	Summe/Differenz, Vielfaches

Merksatz

Für ein lösbares LGS brauchst du **so viele Gleichungen wie Variablen** — bei zwei Unbekannten also zwei voneinander unabhängige Informationen aus dem Text.

Glossar

BEGRIFF	DEFINITION
Additionsverfahren	Rechenverfahren, bei dem beide Gleichungen so multipliziert und addiert werden, dass sich eine Variable weghebt.
Einsetzungsverfahren	Rechenverfahren, bei dem eine nach einer Variablen aufgelöste Gleichung in die andere eingesetzt wird.
Gleichsetzungsverfahren	Rechenverfahren, bei dem beide Gleichungen nach derselben Variablen aufgelöst und gleichgesetzt werden.
Lineare Gleichung mit zwei Variablen	Gleichung der Form $ax + by = c$, deren Lösungen auf einer Geraden liegen.
Lineares Gleichungssystem (LGS)	Zwei (oder mehr) lineare Gleichungen mit denselben Variablen, die gemeinsam gelten sollen.
Lösungspaar	Zahlenpaar $(x \mid y)$, das eine Gleichung bzw. ein System erfüllt.
Parallele Geraden	Geraden gleicher Steigung mit verschiedenem y-Achsenabschnitt; das LGS hat keine Lösung.
Probe	Einsetzen der gefundenen Lösung in beide Ausgangsgleichungen zur Kontrolle.
Schnittpunkt	Gemeinsamer Punkt zweier Geraden; grafische Lösung des LGS.
Steigung	Zahl m in $y = mx + n$, die angibt, wie stark die Gerade steigt oder fällt.
y-Achsenabschnitt	Zahl n in $y = mx + n$; der y-Wert, bei dem die Gerade die y-Achse schneidet.

FAQ — typische Prüfungsfragen

Was ist die Lösung eines linearen Gleichungssystems?

Die Lösung eines LGS ist das Zahlenpaar $(x \mid y)$, das **beide** Gleichungen gleichzeitig erfüllt. Grafisch ist das der Schnittpunkt der beiden Geraden. Setzt man das Paar in beide Ausgangsgleichungen ein, müssen zwei wahre Aussagen entstehen. Ein Paar, das nur eine der beiden Gleichungen erfüllt, ist keine Lösung des Systems.

Wie löst du ein LGS zeichnerisch?

Zuerst löst du beide Gleichungen nach y auf und bringst sie in die Form $y = mx + n$. Dann zeichnest du beide Geraden über ihren y -Achsenabschnitt und ihre Steigung in dasselbe Koordinatensystem. Die Koordinaten des Schnittpunkts liest du ab und schreibst sie als Lösungspaar. Zum Schluss machst du die Probe durch Einsetzen in beide Gleichungen.

Wann nimmst du welches Rechenverfahren?

Steht eine Variable bereits allein (z. B. $y = 2x + 1$), nimmst du meist das Einsetzungsverfahren. Sind beide Gleichungen nach y aufgelöst, ist das Gleichsetzungsverfahren am schnellsten. Stehen beide in der Form $ax + by = c$, ist das Additionsverfahren meist am einfachsten. Die Wahl ist aber nur eine Empfehlung — jedes System lässt sich mit jedem Verfahren lösen.

Wie funktioniert das Gleichsetzungsverfahren?

Beim Gleichsetzungsverfahren löst du beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzt die beiden Terme gleich. Dadurch entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen, die du lösen kannst. Anschließend setzt du das Ergebnis in eine der aufgelösten Gleichungen ein, um die zweite Variable zu erhalten. Zum Schluss folgt die Probe.

Warum musst du beim Einsetzungsverfahren Klammern setzen?

Wenn du einen ganzen Term wie $2x + 1$ in eine andere Gleichung einsetzt, setzt du ihn am besten zunächst in Klammern, damit er als Einheit behandelt wird. Steht ein Plus davor, darfst du die Klammer weglassen: $3x + (2x + 1) = 3x + 2x + 1$. Steht ein Minus davor, musst du beim Auflösen beide Vorzeichen ändern: $-(2x + 1) = -2x - 1$. Die Klammer sorgt dafür, dass jeder Summand richtig multipliziert oder abgezogen wird. Deshalb ist das Klammersetzen hier ein häufiger Prüfungsschwerpunkt.

Wie erkennst du, dass ein LGS keine Lösung hat?

Beim Rechnen fällt die Variable weg und es entsteht eine **falsche** Aussage wie $0 = 4$. Grafisch bedeutet das, dass die beiden Geraden parallel sind, also gleiche Steigung, aber verschiedene y -Achsenabschnitte haben. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge $\{ \}$. Es gibt also kein Paar, das beide Gleichungen

zugleich erfüllt.

Wie erkennst du unendlich viele Lösungen?

Beim Rechnen fällt die Variable weg und es entsteht eine **wahre** Aussage wie $0 = 0$. Das bedeutet, dass beide Gleichungen dieselbe Gerade beschreiben, sie liegen also aufeinander. Jeder Punkt dieser Geraden ist eine Lösung, deshalb gibt es unendlich viele Lösungspaare. Beide Gleichungen enthalten in Wahrheit dieselbe Information.

Warum reicht eine Gleichung mit zwei Variablen nicht aus?

Eine einzelne lineare Gleichung mit zwei Variablen hat unendlich viele Lösungen, die alle auf einer Geraden liegen. Um genau ein Paar festzulegen, braucht man eine zweite, unabhängige Gleichung. Erst der Schnittpunkt beider Geraden legt eine eindeutige Lösung fest. Deshalb braucht man bei zwei Unbekannten zwei unabhängige Gleichungen.

Wie machst du die Probe richtig?

Du setzt das gefundene Zahlenpaar in **beide** Ausgangsgleichungen ein, nicht in die umgeformten. In beiden Fällen muss auf der linken und rechten Seite dieselbe Zahl herauskommen. Nur wenn beide Aussagen wahr sind, ist die Lösung bestätigt. Stimmt nur eine Gleichung, hast du dich irgendwo verrechnet.

Wie übersetzt du eine Textaufgabe in ein LGS?

Zuerst legst du fest, wofür x und y stehen, und schreibst das als Wort auf. Dann übersetzt du jede Information des Textes in eine eigene Gleichung, sodass du zwei Gleichungen erhältst. Diese löst du mit dem passenden Verfahren. Zum Schluss prüfst du das Ergebnis am Text und schreibst einen vollständigen Antwortsatz.

Was bedeutet die Steigung für die Anzahl der Lösungen?

Haben die beiden Geraden **verschiedene** Steigungen, schneiden sie sich in genau einem Punkt, das LGS hat also genau eine Lösung. Bei **gleicher** Steigung sind sie entweder parallel oder identisch. Entscheidend ist dann der y -Achsenabschnitt: gleich bedeutet identische Geraden (unendlich viele Lösungen), verschieden bedeutet parallele Geraden (keine Lösung). So kannst du die Anzahl der Lösungen schon an m und n ablesen.

Führen die drei Rechenverfahren zu unterschiedlichen Ergebnissen?

Nein, alle drei Verfahren liefern bei richtiger Rechnung dasselbe Ergebnis. Sie unterscheiden sich nur im Aufwand, nicht im Resultat. Welches Verfahren am wenigsten Umformungen kostet, hängt von der Form der Gleichungen ab. Deshalb wählst du das Verfahren nach der Aufgabe, nicht nach persönlicher Vorliebe.