

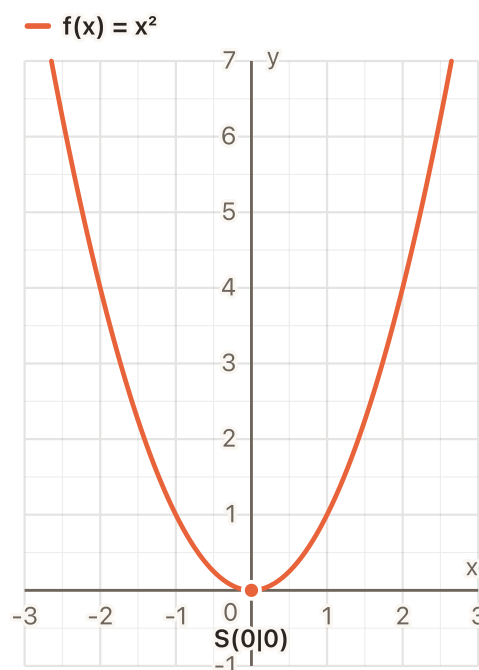
Quadratische Funktionen – Lernzettel

Mathe · Klasse 9 · 8 Kapitel · Glossar · Prüfungsfragen

Quadratische Funktionen beschreiben alles, was sich als Parabel darstellen lässt — von der Flugbahn eines Balls bis zum Bogen einer Brücke. Nach dem Durcharbeiten dieses Materials kennst du die Normalparabel, kannst Parabeln verschieben, strecken und spiegeln, den Scheitelpunkt bestimmen, Nullstellen berechnen, zwischen den beiden Formen umrechnen, Graphen zeichnen und ablesen sowie echte Anwendungsaufgaben lösen.

1. Die Normalparabel $y = x^2$ und ihre Eigenschaften

Die einfachste quadratische Funktion ist $f(x) = x^2$. Ihr Graph heißt **Normalparabel**. Sie entsteht, wenn du für viele x -Werte den Funktionswert x^2 berechnest und die Punkte verbindest. Die Normalparabel ist die Grundform, aus der alle anderen Parabeln durch Verschieben, Strecken und Spiegeln hervorgehen.



Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse, ihr Scheitel liegt im Ursprung

- Der **Scheitelpunkt** (kurz: Scheitel) ist der tiefste Punkt der Normalparabel und liegt im Ursprung $S(0|0)$.
- Die Parabel ist **achsensymmetrisch** zur y-Achse, das heißt $f(x) = f(-x)$ für alle x .
- Sie ist nach **oben geöffnet** und verläuft nur im Bereich $y \geq 0$.
- Die typische **Wertetabelle** zeigt die Achsensymmetrie zur y-Achse: für $x = 1$ und $x = -1$ ergibt sich derselbe y -Wert, ebenso für 2 und -2 sowie 3 und -3 .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

Merksatz

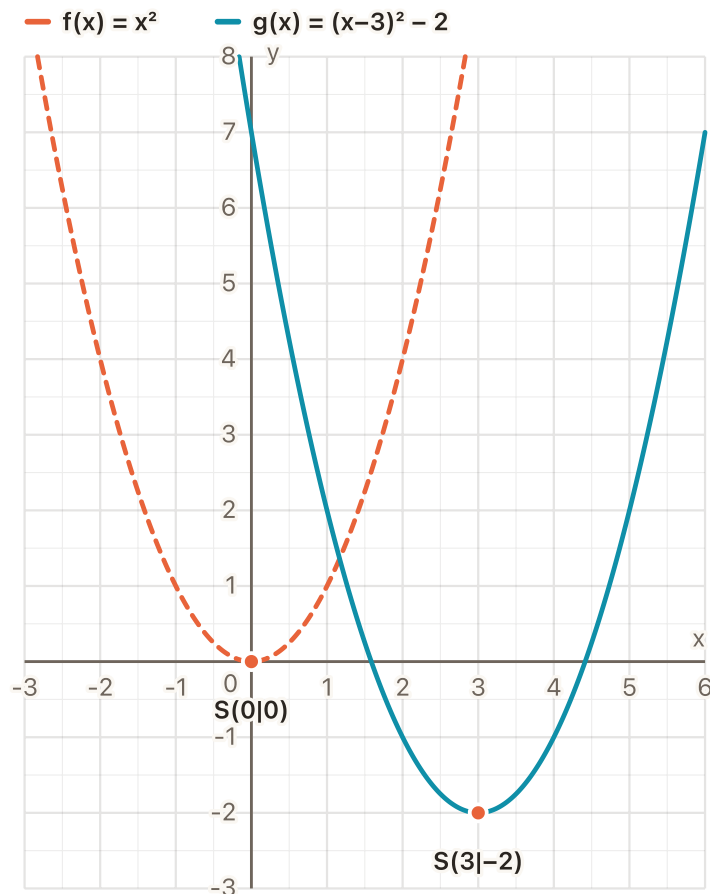
Die Normalparabel $y = x^2$ ist nach oben geöffnet, symmetrisch zur y-Achse und hat ihren Scheitel im Ursprung $S(0 \mid 0)$. Ihre Merkpunkte: jeweils vom Scheitel aus: **1 nach rechts und 1 hoch, 2 nach rechts und 4 hoch**.

2. Verschieben: die Scheitelpunktform $y = (x - d)^2 + e$

Verschiebst du die Normalparabel, ändert sich nur die Lage des Scheitels, nicht die Form. Diese verschobene Parabel beschreibt man mit der **Scheitelpunktform** $y = (x - d)^2 + e$. Der große Vorteil: Du liest den Scheitel direkt ab, nämlich $S(d \mid e)$.

Achte auf das Vorzeichen: In der Klammer steht $(x - d)$, deshalb wird die Parabel bei $y = (x - 3)^2$ um **3 nach rechts** verschoben (nicht nach links).

GLEICHUNG	VERSCHIEBUNG	SCHEITEL
$y = x^2 + e$	um e nach oben (bzw. unten bei $e < 0$)	$S(0 \mid e)$
$y = (x - d)^2$	um d nach rechts (bzw. links bei $d < 0$)	$S(d \mid 0)$
$y = (x - d)^2 + e$	um d nach rechts und e nach oben	$S(d \mid e)$



g entsteht aus f durch Verschieben um 3 nach rechts und 2 nach unten

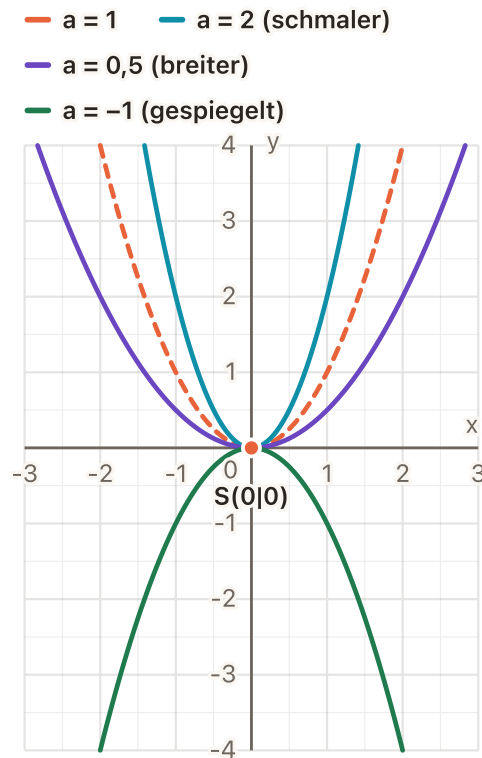
⚠ Typische Fehlerquelle

Das Vorzeichen von d dreht sich um: $(x-3)^2$ verschiebt nach **rechts**, $(x+3)^2 = (x-(-3))^2$ verschiebt nach **links**. Bei e ist es umgekehrt intuitiv: $+e$ nach oben, $-e$ nach unten.

3. Strecken, Stauchen und Spiegeln: der Faktor a

Der Faktor a vor dem Quadrat entscheidet über Form und Öffnungsrichtung der Parabel: $y = a \cdot x^2$. Er sagt, wie „schmal“ oder „breit“ die Parabel ist und ob sie nach oben oder unten geöffnet ist.

WERT VON a	WIRKUNG
$a > 1$	Parabel wird schmäler (gestreckt)
$0 < a < 1$	Parabel wird breiter (gestaucht)
$a < 0$	Parabel ist nach unten geöffnet (gespiegelt an der x-Achse)
$a = 1$	Normalparabel



Der Faktor a streckt, staucht und spiegelt die Parabel

- Bei $a > 0$ ist der Scheitel der **tiefste** Punkt (Minimum), bei $a < 0$ der **höchste** Punkt (Maximum).
- Je größer der Betrag $|a|$, desto steiler und schmaler die Parabel.
- Die vollständige Scheitelpunktform mit allen drei Einflüssen lautet $y = a(x - d)^2 + e$.

Merksatz

Das Vorzeichen von a bestimmt die Öffnung: $a > 0$ nach oben, $a < 0$ nach unten. Der Betrag $|a|$ bestimmt die Breite: großes $|a|$ = schmal, kleines $|a|$ = breit.

4. Die allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$ und der Scheitelpunkt durch quadratische Ergänzung

Die **allgemeine Form** (auch Normalform) lautet $y = ax^2 + bx + c$. Sie ist praktisch zum Rechnen, aber der Scheitel ist nicht ablesbar. Um ihn zu finden, formst du mit der **quadratischen Ergänzung** in die Scheitelpunktform um. Dabei ergänzt du — wenn vor x^2 eine 1 steht — den Term $(\frac{b}{2})^2$ zu einem vollständigen Binom.

Der y-Achsenabschnitt ist übrigens direkt ablesbar: bei $x = 0$ ist $y = c$.

Quadratische Ergänzung Schritt für Schritt

Gesucht ist der Scheitel von $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

Schritt 1 — halben Faktor von x nehmen und quadrieren:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

Schritt 2 — $+9 - 9$ einfügen (ändert den Wert nicht):

$$f(x) = x^2 + 6x + 9 - 9 + 5$$

Schritt 3 — Binom bilden und zusammenfassen:

$$f(x) = (x + 3)^2 - 4$$

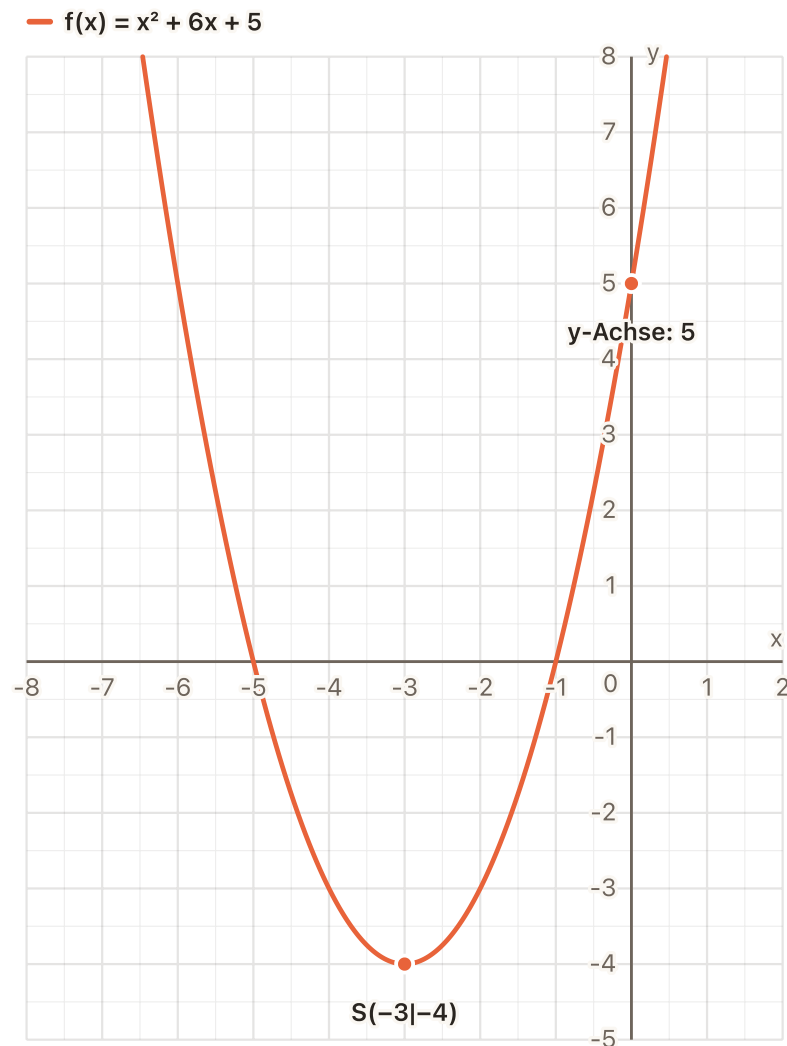
Ablesen: $S(-3 \mid -4)$.

Wenn vor x^2 ein Faktor steht

Steht vor x^2 eine 1, nimmst du die Hälfte des Faktors vor x und quadrierst sie. Steht vor x^2 ein anderer Faktor, klammerst du ihn zuerst aus und verwendest dann den Faktor vor x innerhalb der Klammer:

$$2x^2 + 8x + 6 = 2(x^2 + 4x + 3) = 2(x^2 + 4x + 4 - 4 + 3) = 2[(x + 2)^2 - 1] = 2(x + 2)^2 - 2$$

Ablesen: $S(-2 \mid -2)$.



Der Scheitel $S(-3 | -4)$ wird durch quadratische Ergänzung gefunden

FORM	GLEICHUNG	WAS LIEST MAN AB?
Allgemeine Form	$y = ax^2 + bx + c$	y-Achsenabschnitt c
Scheitelpunktform	$y = a(x - d)^2 + e$	Scheitel $S(d e)$

Scheitel-Formel

Alternativ berechnest du die x-Koordinate des Scheitels mit $x_S = -\frac{b}{2a}$ und setzt sie in f ein, um y_S zu erhalten.

5. Nullstellen berechnen: Wurzelziehen, Faktorisieren, pq-Formel

Nullstellen sind die x-Werte, an denen die Parabel die x-Achse schneidet — dort gilt $f(x) = 0$. Je nach Bauart der Gleichung wählst du das schnellste Verfahren. Eine Parabel kann zwei, eine oder keine Nullstelle haben.

VERFAHREN	WANN ANWENDEN?	BEISPIEL
Wurzelziehen	wenn kein einzelnes x vorkommt	$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$
Faktorisieren (ausklammern)	wenn kein absolutes Glied da ist	$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0$
pq-Formel	für vollständige Gleichungen $x^2 + px + q = 0$	siehe unten

Die **pq-Formel** löst jede Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel heißt **Diskriminante** $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Er verrät die Anzahl der Nullstellen:

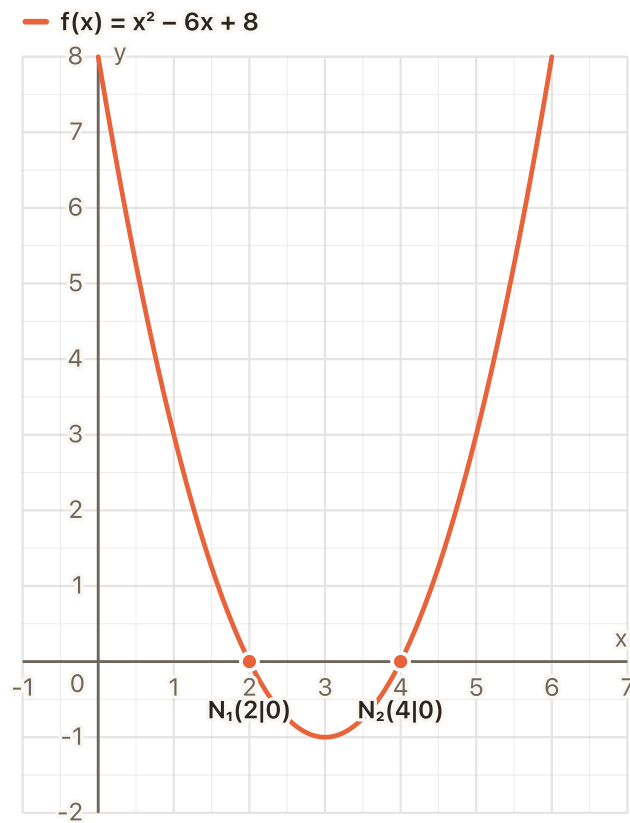
DISKRIMINANTE D	ANZAHL NULLSTELLEN
$D > 0$	zwei Nullstellen
$D = 0$	eine Nullstelle (Scheitel auf x-Achse)
$D < 0$	keine Nullstelle

pq-Formel angewandt

Löse $x^2 - 6x + 8 = 0$, also $p = -6$, $q = 8$.

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$$

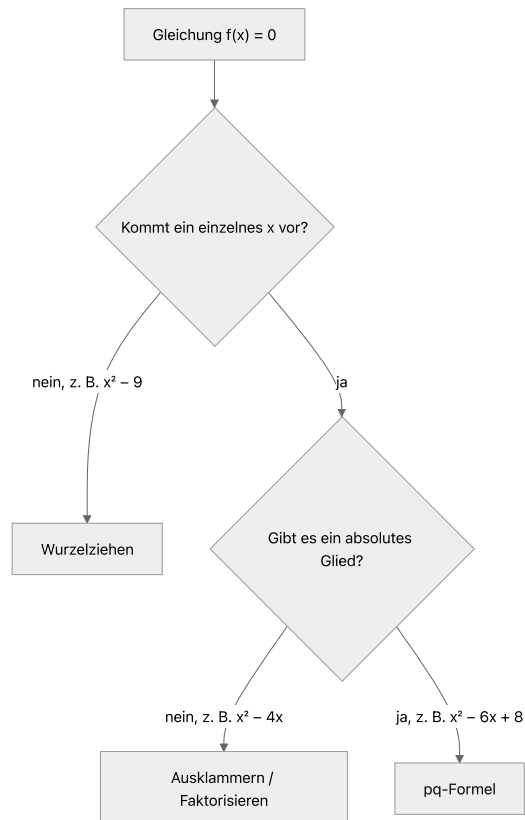
$$x_{1,2} = 3 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 2$$



Die Nullstellen $x = 2$ und $x = 4$ sind die Schnittpunkte mit der x-Achse

⚠ Vor der pq-Formel prüfen

Die pq-Formel gilt nur, wenn vor x^2 eine 1 steht. Steht dort z. B. $2x^2 + \dots = 0$, musst du zuerst durch 2 teilen.



6. Zwischen Scheitelpunktform und allgemeiner Form umrechnen

Beide Formen beschreiben dieselbe Parabel — du musst nur je nach Aufgabe hin und her wechseln können. Von der Scheitelpunktform zur allgemeinen Form kommst du durch **Ausmultiplizieren**, in die Gegenrichtung durch **quadratische Ergänzung** (Abschnitt 4).

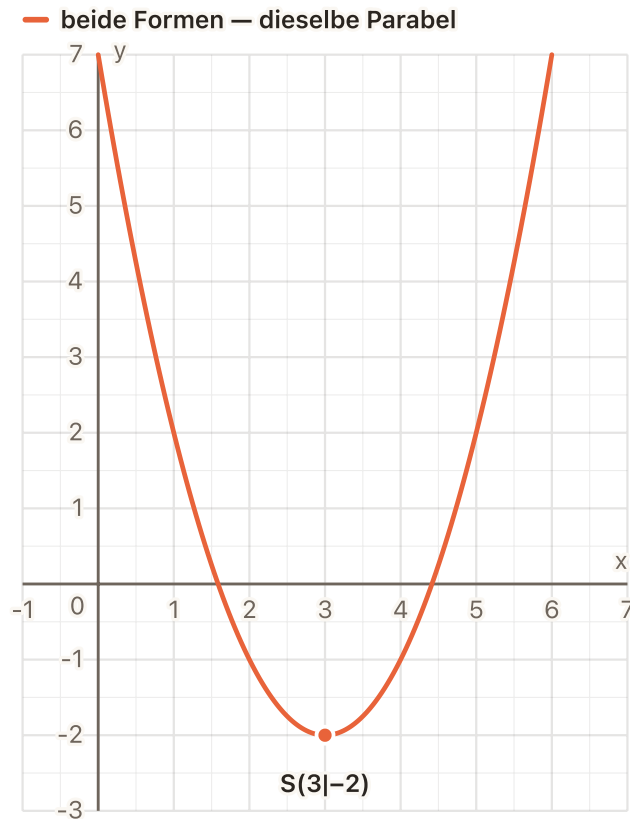
Scheitelpunktform → allgemeine Form

Wandle $f(x) = (x - 3)^2 - 2$ um.

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 2$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 7$$

RICHTUNG	VERFAHREN	WERKZEUG
Scheitelpunktform → allgemeine Form	ausmultiplizieren	binomische Formel
allgemeine Form → Scheitelpunktform	quadratische Ergänzung	bei $a = 1$: $(\frac{b}{2})^2$ ergänzen; sonst zuerst a ausklammern



$(x-3)^2-2$ und x^2-6x+7 beschreiben genau diese Parabel

🔔 Merksatz

Ausmultiplizieren führt zur allgemeinen Form, quadratische Ergänzung zur Scheitelpunktform.
Zur Kontrolle: der y-Achsenabschnitt c muss in beiden Formen denselben Wert liefern (bei $x = 0$ einsetzen).

7. Parabeln zeichnen und die Funktionsgleichung aus dem Graphen ablesen

Zum **Zeichnen** einer Parabel gehst du am besten von der Scheitelpunktform aus: Scheitel eintragen, dann mit einer Wertetabelle einige Punkte links und rechts berechnen und die Symmetrie ausnutzen. Umgekehrt kannst du aus einem Graphen die **Funktionsgleichung ablesen**, wenn du Scheitel und einen weiteren Punkt kennst.

Zeichnen — Schritt für Schritt:

- Scheitel $S(d \mid e)$ einzeichnen.
- Öffnung und Breite über a festlegen (Schablone: 1 rechts/ a hoch, 2 rechts/ $4a$ hoch).
- Wertetabelle mit einigen x -Werten rechts vom Scheitel ausfüllen.
- Punkte links durch Achsensymmetrie spiegeln und alles glatt verbinden.

Ablesen — Schritt für Schritt:

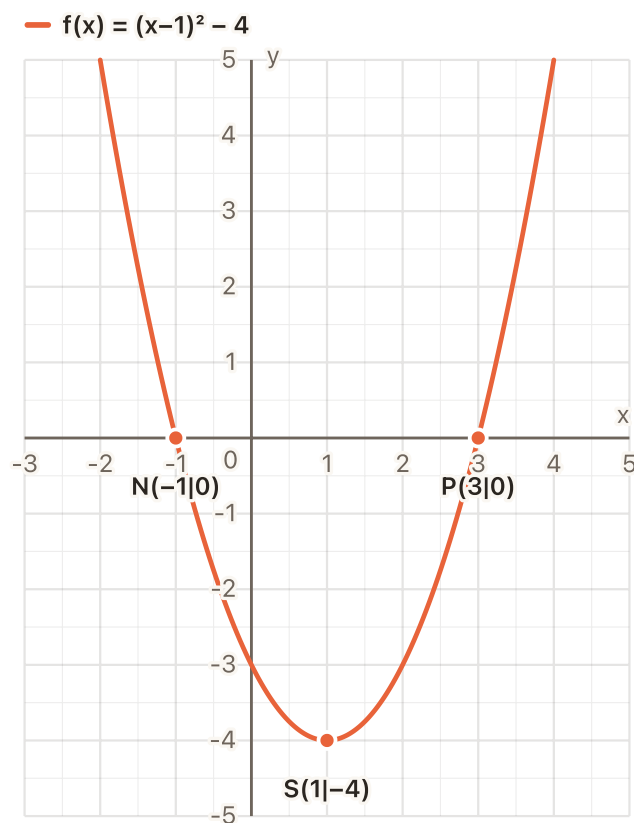
- Scheitel ablesen → das liefert d und e .
- Einen weiteren gut ablesbaren Punkt $P(x \mid y)$ wählen.
- In $y = a(x - d)^2 + e$ einsetzen und nach a auflösen.

Gleichung aus dem Graphen

Scheitel $S(1 \mid -4)$, außerdem geht die Parabel durch $P(3 \mid 0)$.

$$0 = a(3 - 1)^2 - 4 \Rightarrow 0 = 4a - 4 \Rightarrow a = 1$$

Also $f(x) = (x - 1)^2 - 4$.



Aus Scheitel und einem Punkt bestimmt man den Faktor a

Kontrolle

Prüfe zum Schluss immer einen zweiten Punkt aus dem Graphen in deiner gefundenen Gleichung. Stimmt er, hast du richtig abgelesen.

8. Anwendungsaufgaben (Wurfbahn, Brückenbogen, größte Fläche)

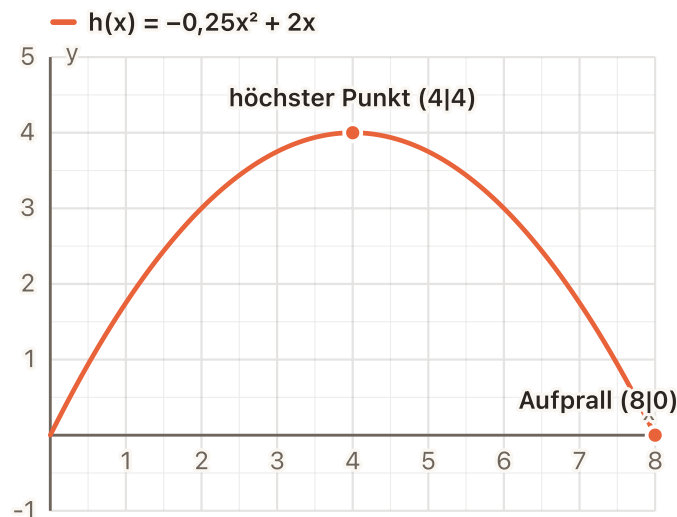
In Anwendungsaufgaben steckt hinter der Parabel eine echte Situation. Meist fragt man nach dem **Scheitel** (höchster/tiefster Punkt, größte Fläche), nach **Nullstellen** (Auftreffpunkt, Spannweite) oder nach einem bestimmten Funktionswert. Der Schlüssel ist, die Frage in „Scheitel gesucht?“ oder „Nullstelle gesucht?“ zu übersetzen.

SITUATION	PARABEL ÖFFNET	GESUCHTE GRÖSSE	WERKZEUG
Wurfbahn eines Balls	nach unten	größte Höhe	Scheitel
Wurfweite / Aufprall	nach unten	wo Höhe = 0	Nullstellen
Brückenbogen	nach unten	Höhe / Spannweite	Scheitel / Nullstellen
größte Rechteckfläche	nach unten	maximaler Flächeninhalt	Scheitel

Wurfbahn

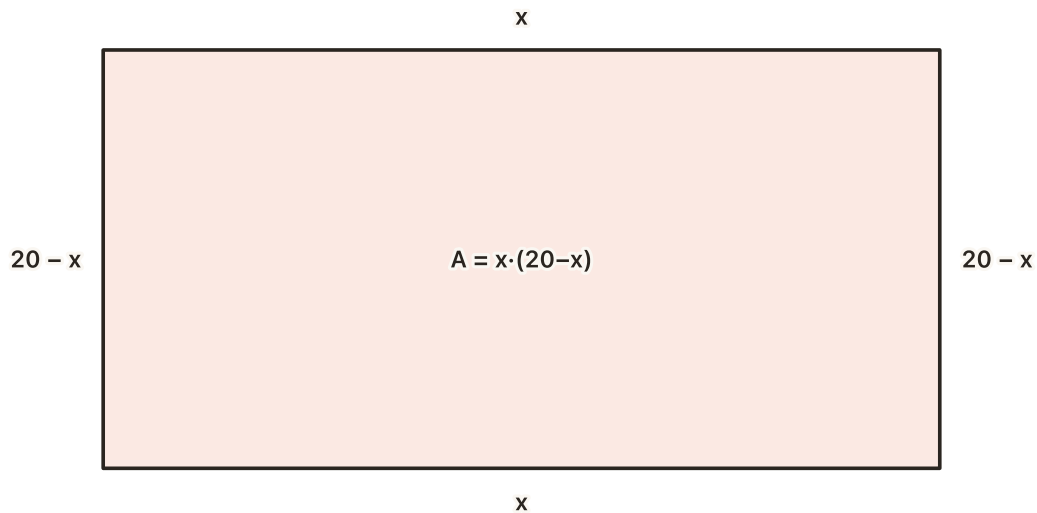
Ein Ball fliegt gemäß $h(x) = -0,25x^2 + 2x$ (x und h in Metern).

- a) Größte Höhe: Scheitel bei $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-0,25)} = 4$, also $h(4) = 4$ m.
- b) Wurfweite: $-0,25x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-0,25x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 8$. Der Ball landet nach **8 m**.



Die Wurfbahn: höchster Punkt bei 4 m Höhe, Aufprall nach 8 m

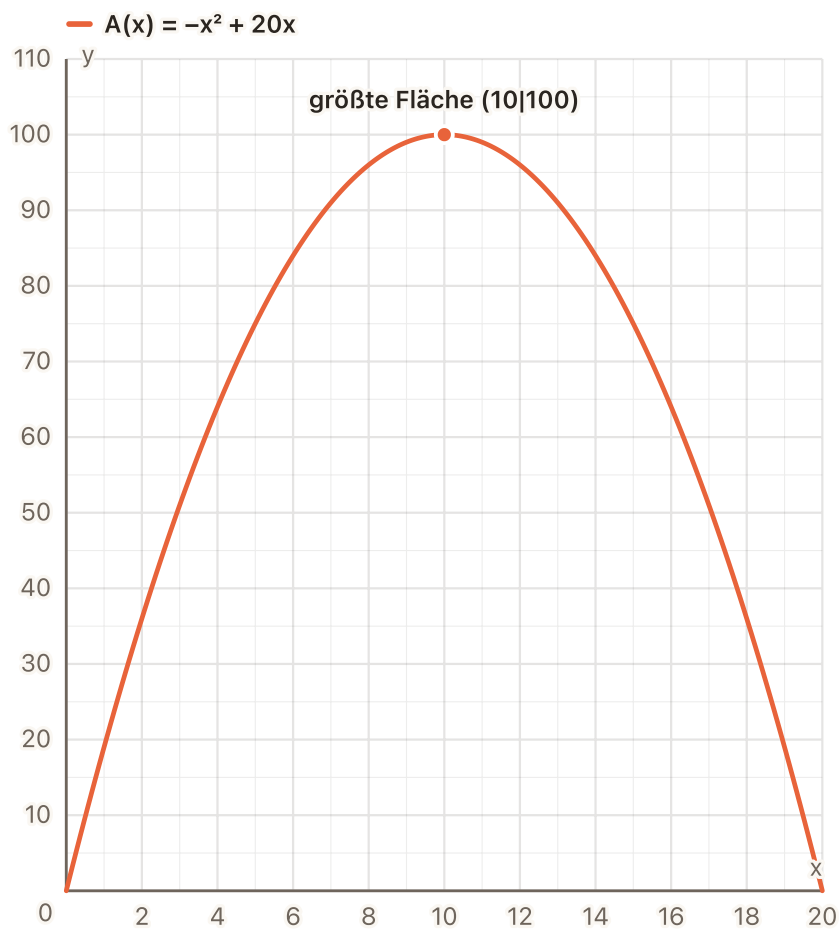
Bei der **größten Fläche** stellst du zuerst die Flächenformel als quadratische Funktion auf. Beispiel: Ein rechteckiger Zaun mit 40 m Draht, eine Seite ist x , die andere $20 - x$.



Rechteck mit Umfang 40 m: eine Seite x , die andere $20 - x$

Größte Fläche

Die Fläche ist $A(x) = x \cdot (20 - x) = -x^2 + 20x$. Scheitel: $x_S = -\frac{20}{2 \cdot (-1)} = 10$, also $A(10) = 10 \cdot 10 = 100$ m². Das Rechteck mit der größten Fläche ist ein **Quadrat** mit Seite 10 m und Fläche 100 m².



x-Achse in 2er-Schritten, y-Achse in 10er-Schritten

Der Scheitel gibt die größte Fläche: 100 m² bei Seitenlänge 10 m

🔔 Merksatz

Frage nach „am höchsten / am größten / am kleinsten“ → **Scheitel**. Frage nach „wo trifft es auf / wie weit / Spannweite“ → **Nullstellen**.

Glossar

BEGRIFF	DEFINITION
Achsensymmetrie	Eigenschaft der Parabel: die linke und rechte Hälfte sind spiegelgleich zur senkrechten Achse durch den Scheitel.
Allgemeine Form	Darstellung $y = ax^2 + bx + c$; praktisch zum Rechnen, y-Achsenabschnitt c direkt ablesbar.
Diskriminante	Der Ausdruck $D = (\frac{b}{2})^2 - q$ unter der Wurzel; bestimmt die Anzahl der Nullstellen.
Faktor a	Zahl vor x^2 ; bestimmt Öffnungsrichtung und Breite der Parabel.
Faktorisieren	Umformen einer Gleichung in ein Produkt (Ausklammern), um Nullstellen abzulesen.
Nullstelle	x-Wert, an dem die Parabel die x-Achse schneidet ($f(x) = 0$).
Normalparabel	Graph von $y = x^2$ mit Scheitel im Ursprung.
Öffnungsrichtung	Nach oben bei $a > 0$, nach unten bei $a < 0$.
Parabel	Graph einer quadratischen Funktion.
pq-Formel	Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - q}$ für $x^2 + px + q = 0$.
Quadratische Ergänzung	Verfahren, das die allgemeine Form durch Ergänzen von $(\frac{b}{2})^2$ in die Scheitelpunktform bringt — bei $a = 1$; sonst wird a zuerst ausgeklammert.
Scheitelpunkt	Höchster oder tiefster Punkt der Parabel.
Scheitelpunktform	Darstellung $y = a(x - d)^2 + e$; Scheitel $S(d \mid e)$ direkt ablesbar.
y-Achsenabschnitt	Schnittpunkt mit der y-Achse, Wert c (bei $x = 0$).

FAQ — typische Prüfungsfragen

Welche Eigenschaften hat die Normalparabel $y = x^2$?

Die Normalparabel ist der Graph von $y = x^2$. Sie ist nach oben geöffnet, achsensymmetrisch zur y-Achse und hat ihren Scheitelpunkt im Ursprung $S(0 \mid 0)$. Für jeden x-Wert und seinen Gegenwert ergibt sich derselbe Funktionswert, weil $f(x) = f(-x)$ gilt. Charakteristische Punkte sind neben dem Scheitel $(1 \mid 1)$ und $(2 \mid 4)$ sowie deren Spiegelungen.

Woran erkennt man an der Scheitelpunktform den Scheitel?

In der Scheitelpunktform $y = a(x - d)^2 + e$ liest man den Scheitel direkt als $S(d \mid e)$ ab. Wichtig ist das Vorzeichen: In der Klammer steht $x - d$, deshalb bedeutet $(x - 3)^2$ eine Verschiebung um 3 nach rechts. Der Summand e verschiebt die Parabel um e nach oben bzw. bei negativem e nach unten.

Was bewirkt der Faktor a ?

Der Faktor a bestimmt Öffnung und Breite der Parabel. Ist $a > 0$, öffnet sie nach oben, ist $a < 0$, öffnet sie nach unten. Ein Betrag $|a| > 1$ macht die Parabel schmaler (Streckung), ein Betrag $0 < |a| < 1$ macht sie breiter (Stauchung). Bei $a = 1$ erhält man die Normalparabel.

Wie bestimmt man den Scheitel aus der allgemeinen Form?

Aus der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ bestimmt man den Scheitel durch quadratische Ergänzung: Bei $a = 1$ ergänzt man $(\frac{b}{2})^2$ und bildet ein Binom; steht vor x^2 ein anderer Faktor, klammert man ihn zuerst aus und ergänzt innerhalb der Klammer. Alternativ berechnet man die x-Koordinate mit $x_S = -\frac{b}{2a}$ und setzt sie in die Funktion ein. Zum Beispiel liefert $f(x) = x^2 + 6x + 5$ nach der Ergänzung $(x + 3)^2 - 4$, also $S(-3 \mid -4)$.

Wann verwendet man welches Verfahren zur Nullstellenberechnung?

Man wählt das Verfahren nach der Bauart der Gleichung. Wurzelziehen nutzt man, wenn kein einzelnes x vorkommt, etwa bei $x^2 - 9 = 0$. Faktorisieren (Ausklammern) nutzt man, wenn kein absolutes Glied vorhanden ist, etwa bei $x^2 - 4x = 0$. Die pq-Formel wendet man auf vollständige Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ an.

Wie lautet die pq-Formel und was sagt die Diskriminante?

Die pq-Formel lautet $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ und löst Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$. Der Term unter der Wurzel ist die Diskriminante D . Ist $D > 0$, gibt es zwei Nullstellen, bei $D = 0$ genau eine und bei $D < 0$ keine. Vor dem Einsetzen muss der Faktor vor x^2 gleich 1 sein.

Wie rechnet man von der Scheitelpunktform in die allgemeine Form um?

Man rechnet durch Ausmultiplizieren um. Dazu wendet man auf $(x - d)^2$ die binomische Formel an und fasst anschließend alles zusammen. Aus $f(x) = (x - 3)^2 - 2$ wird so $x^2 - 6x + 9 - 2 = x^2 - 6x + 7$. Zur Kontrolle prüft man, ob der y-Achsenabschnitt in beiden Formen gleich ist.

Wie liest man die Funktionsgleichung aus einem Graphen ab?

Zuerst liest man den Scheitel $S(d \mid e)$ ab und trägt d und e in die Scheitelpunktform ein. Dann wählt man einen weiteren gut ablesbaren Punkt und setzt ihn ein, um den Faktor a zu bestimmen. Zum Schluss kontrolliert man mit einem zweiten Punkt, ob die Gleichung stimmt.

Wie erkennt man, ob man in einer Anwendungsaufgabe den Scheitel oder die Nullstellen braucht?

Man übersetzt die Frage. Wird nach der größten Höhe, der größten Fläche oder dem tiefsten Punkt gefragt, sucht man den Scheitel. Wird nach dem Auftreffpunkt, der Wurfweite oder der Spannweite gefragt, sucht man die Nullstellen, denn dort ist der Funktionswert null.

Warum hat eine nach unten geöffnete Parabel ein Maximum?

Bei $a < 0$ öffnet sich die Parabel nach unten, sodass alle Punkte unterhalb des Scheitels liegen. Deshalb ist der Scheitel der höchste Punkt und stellt ein Maximum dar. Genau darum beschreibt eine nach unten geöffnete Parabel Wurfbahnen und Brückenbögen mit einem höchsten Punkt.

Wie zeichnet man eine Parabel zuverlässig?

Man startet mit dem Scheitel aus der Scheitelpunktform und trägt ihn ein. Dann berechnet man mit einer Wertetabelle einige Punkte rechts vom Scheitel und spiegelt sie wegen der Achsensymmetrie nach links. Zum Schluss verbindet man alle Punkte zu einer glatten Kurve, wobei die Breite über den Faktor a bestimmt ist.

Was ist der Unterschied zwischen Scheitelpunktform und allgemeiner Form?

Beide Formen beschreiben dieselbe Parabel, betonen aber unterschiedliche Informationen. In der Scheitelpunktform $y = a(x - d)^2 + e$ liest man den Scheitel direkt ab, in der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ den y-Achsenabschnitt c . Mit quadratischer Ergänzung wechselt man in die Scheitelpunktform, mit Ausmultiplizieren in die allgemeine Form.