

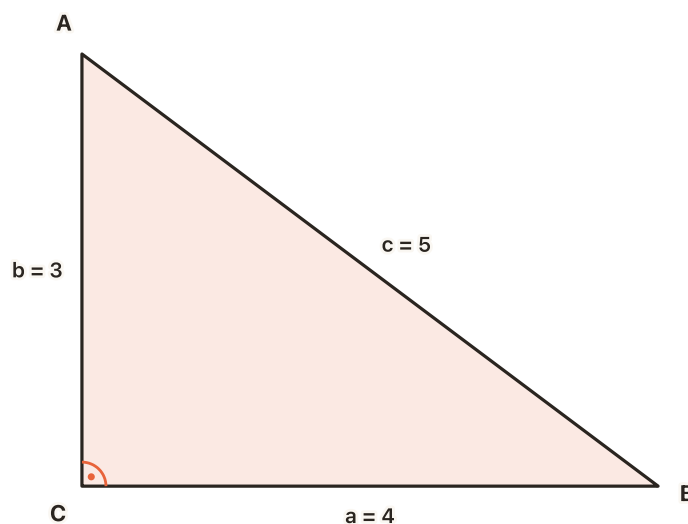
Satz des Pythagoras – Lernzettel

Mathe · Klasse 9 · 8 Kapitel · Glossar · Prüfungsfragen

Der Satz des Pythagoras ist eine der wichtigsten Formeln der Geometrie: Er verbindet die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks über die einfache Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$. Nach dem Durcharbeiten erkennst du Katheten und Hypotenuse sicher, berechnest fehlende Seiten, prüfst Dreiecke auf Rechtwinkligkeit und wendest den Satz in Figuren, im Raum und in Sachaufgaben an.

1. Rechtwinklige Dreiecke: Katheten und Hypotenuse erkennen

Ein **rechtwinkliges Dreieck** hat genau einen rechten Winkel (90°). Die Bezeichnung der Seiten hängt allein von der Lage zum rechten Winkel ab, nicht von der Länge. Deshalb musst du zuerst den rechten Winkel finden, bevor du die Seiten benennst.



Der rechte Winkel liegt bei C. Die Hypotenuse c liegt ihm gegenüber, a und b sind die Katheten.

- Die **Hypotenuse** ist die längste Seite und liegt immer **gegenüber** dem rechten Winkel. Im Bild ist das die Seite c.
- Die beiden **Katheten** sind die kürzeren Seiten, die den rechten Winkel **einschließen**. Im Bild sind das a und b.
- Nach der üblichen Konvention liegt der rechte Winkel bei C; die Seite c (die Hypotenuse) liegt dem Eckpunkt C gegenüber.
- Eine Seite wird immer mit dem Kleinbuchstaben des gegenüberliegenden Eckpunkts benannt: Seite a liegt gegenüber von A.

BEGRIFF	LAGE	BESONDERHEIT
Hypotenuse (c)	gegenüber dem rechten Winkel	immer die längste Seite
Kathete (a)	schließt den rechten Winkel ein	liegt gegenüber Eckpunkt A
Kathete (b)	schließt den rechten Winkel ein	liegt gegenüber Eckpunkt B

🔔 Merksatz

Die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber und ist die längste Seite. Die beiden Katheten bilden zusammen den rechten Winkel.

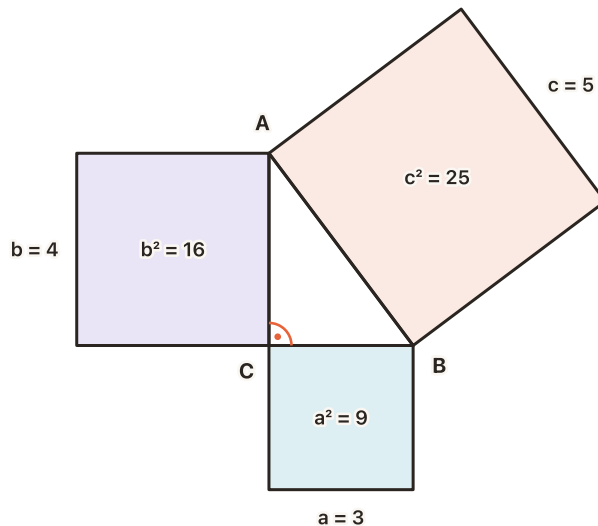
⚠️ Häufiger Fehler

Verwechsle Katheten und Hypotenuse nicht! In der Formel $a^2 + b^2 = c^2$ steht c **immer** für die Hypotenuse. Wenn du den rechten Winkel nicht bei C hast, benenne die Seiten neu, damit die Formel stimmt.

2. Der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ – und warum er gilt

Der **Satz des Pythagoras** beschreibt den Zusammenhang der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Er lautet: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächen der beiden Kathetenquadrate gleich der Fläche des Hypotenusenquadrats.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Die Quadrate über den Katheten ($9 + 16$) sind zusammen so groß wie das Quadrat über der Hypotenuse (25).

- Die Aussage lässt sich am Flächenbild verstehen: Zeichnet man über jede Seite ein Quadrat, so passen die beiden kleinen Quadrate flächengleich in das große Quadrat: $9 + 16 = 25$.
- a^2 bedeutet geometrisch den **Flächeninhalt** des Quadrats über der Kathete a . Deshalb heißt der Satz auch „Flächensatz“.
- Der Satz gilt **nur** in rechtwinkligen Dreiecken. Ohne rechten Winkel ist die Gleichung falsch.
- Aus der Grundform lassen sich alle anderen Formen durch Umstellen gewinnen (siehe Abschnitte 3 und 4).

Zahlenbeispiel zum Nachprüfen

Für $a = 3$, $b = 4$ gilt:

$$a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 = c^2$$

Also ist $c = 5$. Das Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 ist das bekannteste rechtwinklige Dreieck.

Warum gilt der Satz?

Legt man vier gleiche rechtwinklige Dreiecke in ein großes Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$, bleibt in der Mitte ein Quadrat mit der Seite c übrig. Vergleicht man die Flächen, ergibt sich nach dem Ausrechnen genau $a^2 + b^2 = c^2$. Das ist der klassische Zerlegungsbeweis.

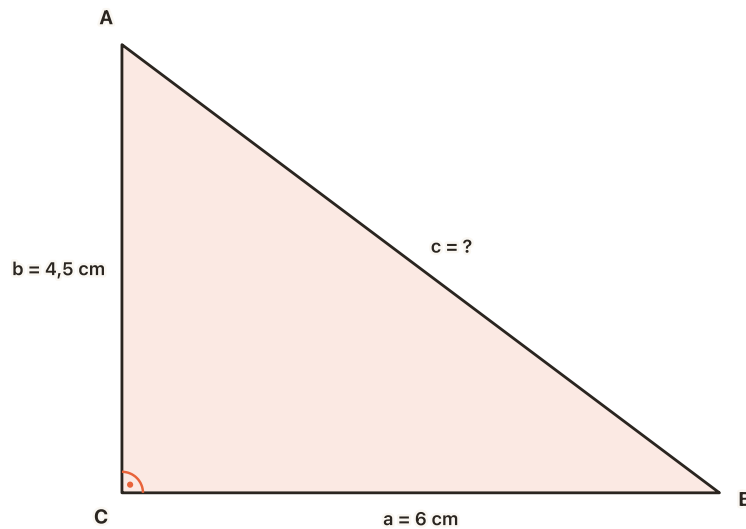
3. Die Hypotenuse berechnen

Ist der rechte Winkel gegeben und kennst du **beide Katheten** a und b , kannst du die Hypotenuse c direkt berechnen. Dazu setzt du in die Grundform ein und ziehst am Ende die Wurzel.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Schritt für Schritt:

1. Prüfe, welche Seite die Hypotenuse ist (gegenüber dem rechten Winkel).
2. Setze die beiden Kathetenlängen in $a^2 + b^2 = c^2$ ein.
3. Berechne die Quadrate und addiere sie.
4. Ziehe die Quadratwurzel, um c zu erhalten.
5. Runde sinnvoll und schreibe die Einheit dazu.



Beide Katheten sind bekannt, gesucht ist die Hypotenuse c .

Hypotenuse berechnen

Gegeben: $a = 6$ cm, $b = 4,5$ cm. Gesucht: c .

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 4,5^2$$

$$c^2 = 36 + 20,25 = 56,25$$

$$c = \sqrt{56,25} = 7,5 \text{ cm}$$

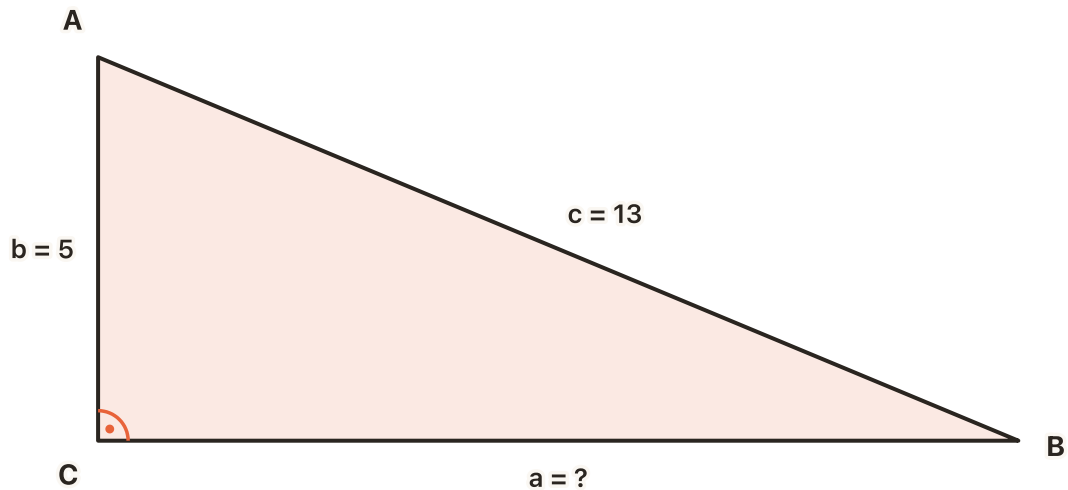
Merksatz

Suchst du die **Hypotenuse**, wird **addiert**: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Die Hypotenuse ist immer die längste Seite – dein Ergebnis muss also größer sein als jede Kathete.

4. Eine Kathete berechnen

Kennst du die **Hypotenuse** und **eine Kathete**, kannst du die fehlende Kathete berechnen. Dazu stellst du die Grundform um: Die bekannte Kathete wird **subtrahiert**.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad \text{bzw.} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



Hypotenuse und eine Kathete sind bekannt, gesucht ist die zweite Kathete.

Schritt für Schritt:

1. Bestimme die Hypotenuse (längste Seite, gegenüber dem rechten Winkel).
2. Stelle die Formel nach der gesuchten Kathete um.
3. Setze ein und quadriere die bekannten Werte.
4. Subtrahiere und ziehe die Wurzel.

Kathete berechnen

Gegeben: $c = 13$ cm, $b = 5$ cm. Gesucht: a .

$$a^2 = c^2 - b^2 = 13^2 - 5^2$$

$$a^2 = 169 - 25 = 144$$

$$a = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

GESUCHT	FORMEL	RECHENART
Hypotenuse c	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	addieren
Kathete a	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	subtrahieren
Kathete b	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	subtrahieren

⚠ Vorzeichen beachten

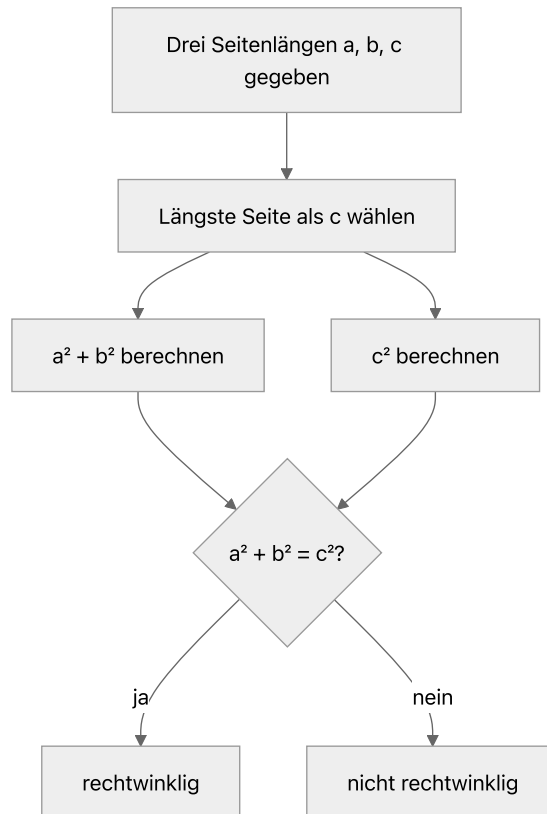
Beim Berechnen einer Kathete wird von c^2 (dem Quadrat der Hypotenuse) subtrahiert. Steht das Ergebnis unter der Wurzel negativ, hast du Hypotenuse und Kathete verwechselt.

5. Prüfen, ob ein Dreieck rechtwinklig ist (Umkehrung des Satzes)

Die **Umkehrung des Satzes von Pythagoras** erlaubt es, allein aus den drei Seitenlängen zu entscheiden, ob ein Dreieck rechtwinklig ist. Sie lautet: Gilt für die längste Seite c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig – und der rechte Winkel liegt gegenüber der längsten Seite.

Schritt für Schritt:

1. Ordne die Seiten der Größe nach; die längste Seite ist der Kandidat für c .
2. Berechne $a^2 + b^2$ (die beiden kürzeren Seiten).
3. Berechne c^2 (die längste Seite).
4. Vergleiche: Sind beide Werte gleich, ist das Dreieck rechtwinklig, sonst nicht.



🧪 Rechtwinklig oder nicht?

Dreieck mit den Seiten 6 cm, 8 cm, 10 cm. Längste Seite: 10 cm.

$$a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$c^2 = 10^2 = 100$$

Beide Werte sind gleich $\Rightarrow$ das Dreieck ist **rechtwinklig**.

🧪 Gegenbeispiel

Dreieck mit 4 cm, 5 cm, 6 cm. Längste Seite: 6 cm.

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \neq 36 = 6^2$$

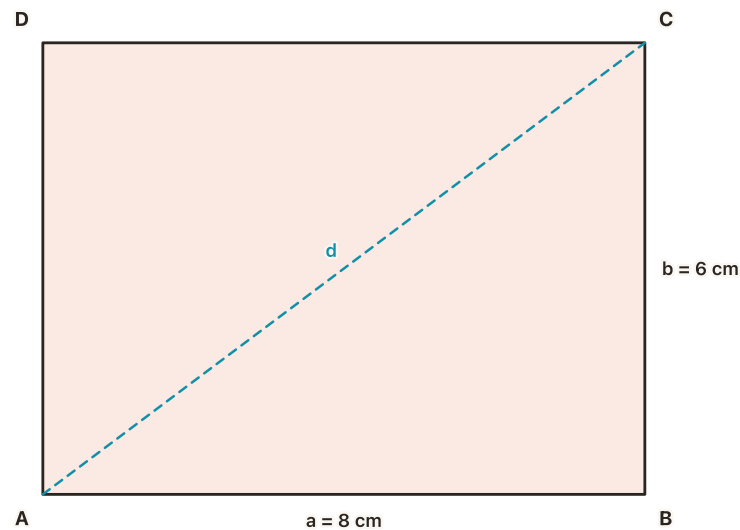
Die Werte sind ungleich $\Rightarrow$ das Dreieck ist **nicht rechtwinklig**.

💡 Merksatz

Gilt $a^2 + b^2 = c^2$, ist das Dreieck rechtwinklig. Der rechte Winkel liegt immer gegenüber der längsten Seite.

6. Pythagoras in Figuren: Quadrat, Rechteck, gleichschenkliges Dreieck, Raute

In vielen Figuren stecken versteckte rechtwinklige Dreiecke — meist entlang einer **Diagonale** oder einer **Höhe**. Der Trick ist immer derselbe: Zeichne die passende Hilfslinie ein und suche das rechtwinklige Dreieck.



Die Diagonale d teilt das Rechteck in zwei rechtwinklige Dreiecke.

- Rechteck:** Die Diagonale d ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b : $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Quadrat:** Sonderfall des Rechtecks mit $a = b$. Die Diagonale ist $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.
- Gleichschenkliges Dreieck:** Die Höhe teilt es in zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke. Mit halber Basis $\frac{g}{2}$ und Schenkel s gilt $h = \sqrt{s^2 - (\frac{g}{2})^2}$.
- Raute:** Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich. Aus den halben Diagonalen $\frac{e}{2}$ und $\frac{f}{2}$ berechnet man die Seitenlänge $s = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2}$.

FIGUR	RECHTWINKLIGES DREIECK AUS	GESUCHTE GRÖSSE
Rechteck	Länge a , Breite b	Diagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2}$
Quadrat	Seite a , Seite a	Diagonale $d = a\sqrt{2}$
gleichschenkliges Dreieck	halbe Basis $\frac{g}{2}$, Höhe h	Schenkel $s = \sqrt{h^2 + (\frac{g}{2})^2}$
Raute	halbe Diagonalen $\frac{e}{2}, \frac{f}{2}$	Seite $s = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2}$

Quadrat-Diagonale

Ein Quadrat hat die Seite $a = 5$ cm. Die Diagonale ist:

$$d = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7,07 \text{ cm}$$

Höhe im gleichschenkligen Dreieck

Basis $g = 10$ cm, Schenkel $s = 13$ cm. Die halbe Basis ist 5 cm.

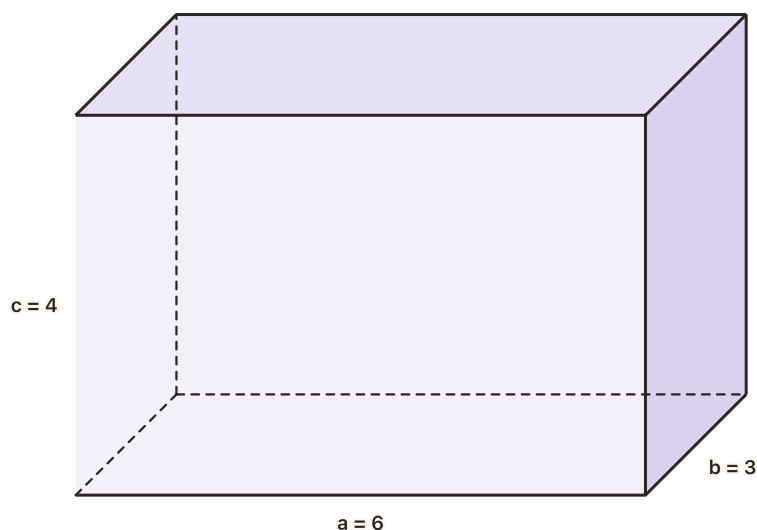
$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Merksatz

Suchst du in einer Figur eine Länge, zeichne eine Diagonale oder Höhe ein — sie erzeugt ein rechtwinkliges Dreieck, in dem du Pythagoras anwenden kannst.

7. Pythagoras im Raum: die Raumdiagonale im Quader

Auch im Raum hilft Pythagoras — man muss ihn nur **zweimal** anwenden. Die **Raumdiagonale** eines Quaders verbindet zwei gegenüberliegende Ecken durch den Körper hindurch.



Quader mit Länge a , Breite b und Höhe c – gesucht ist die Raumdiagonale von Ecke zu Ecke.

Schritt für Schritt:

1. Berechne zuerst die **Flächendiagonale** d der Grundfläche mit $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Diese Flächendiagonale d und die Höhe c bilden ein neues rechtwinkliges Dreieck.

3. Die **Raumdiagonale** D ist dessen Hypotenuse: $D = \sqrt{d^2 + c^2}$.

4. Setzt man beides zusammen, ergibt sich die kompakte Formel.

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Raumdiagonale eines Quaders

Quader mit $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm. Flächendiagonale:

$$d = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$

Raumdiagonale:

$$D = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{45 + 16} = \sqrt{61} \approx 7,81 \text{ cm}$$

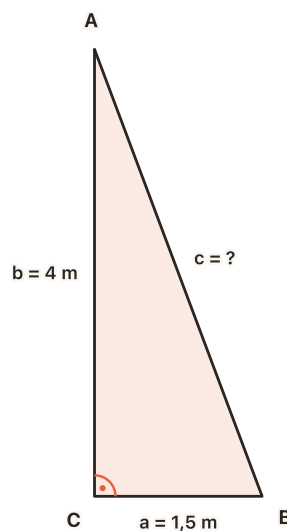
Oder direkt: $D = \sqrt{6^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{61} \approx 7,81 \text{ cm}$.

Merksatz

Die Raumdiagonale eines Quaders ist $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ — alle drei Kantenlängen quadriert und addiert, dann die Wurzel.

8. Anwendungsaufgaben (Leiter an der Wand, Zeltstange, Abstand zweier Punkte)

In Sachaufgaben versteckt sich der rechte Winkel oft in der Realität: eine Wand steht senkrecht zum Boden, eine Zeltstange steht senkrecht. Der wichtigste Schritt ist immer, eine **Skizze mit dem rechtwinkligen Dreieck** anzufertigen.



Die Leiter (Hypotenuse c) lehnt an der Wand (Kathete b), ihr Fuß steht 1,5 m entfernt (Kathete a).

Vorgehen bei Sachaufgaben:

1. Lies den Text und fertige eine Skizze an.
2. Markiere den rechten Winkel und beschrifte die Seiten.
3. Entscheide: Suchst du die Hypotenuse (addieren) oder eine Kathete (subtrahieren)?
4. Setze in die Formel ein, rechne und runde sinnvoll.
5. Formuliere einen **Antwortsatz** mit Einheit.

Leiter an der Wand

Eine Leiter reicht $b = 4$ m hoch an die Wand, ihr Fuß steht $a = 1,5$ m von der Wand entfernt. Wie lang ist die Leiter?

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1,5^2 + 4^2} = \sqrt{2,25 + 16} = \sqrt{18,25} \approx 4,27 \text{ m}$$

Antwort: Die Leiter ist etwa 4,27 m lang.

Abstand zweier Punkte

Punkt $P(1 \mid 2)$ und $Q(7 \mid 10)$. Der waagerechte Abstand ist $7 - 1 = 6$, der senkrechte $10 - 2 = 8$.

$$\overline{PQ} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Antwort: Die Punkte sind 10 Einheiten voneinander entfernt.

Zeltstange

Steht eine Zeltstange senkrecht und ist mit einer Schnur am Boden befestigt, bilden Stange (Kathete), Bodenabstand (Kathete) und Schnur (Hypotenuse) ein rechtwinkliges Dreieck. Die Schnurlänge berechnest du mit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Antwortsatz nicht vergessen

In Sachaufgaben gibt es Punkte für den Antwortsatz mit Einheit. Eine reine Zahl ohne Bezug zur Frage ist unvollständig.

Glossar

BEGRIFF	DEFINITION
Diagonale	Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte einer Figur.

BEGRIFF	DEFINITION
Flächendiagonale	Diagonale einer Seitenfläche eines Quaders.
Gleichschenkliges Dreieck	Dreieck mit zwei gleich langen Schenkeln; die Höhe zur Basis teilt es in zwei rechtwinklige Dreiecke.
Hypotenuse	Längste Seite im rechtwinkligen Dreieck; liegt dem rechten Winkel gegenüber (Seite c).
Kathete	Eine der beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen (Seiten a und b).
Quadratwurzel	Umkehrung des Quadrierens; $\sqrt{a^2} = a$ für $a \geq 0$.
Raumdiagonale	Strecke, die zwei gegenüberliegende Ecken eines Quaders durch den Körper verbindet: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Raute	Viereck mit vier gleich langen Seiten; die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich.
Rechter Winkel	Winkel von 90° , im rechtwinkligen Dreieck durch ein Kästchen markiert.
Satz des Pythagoras	In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
Umkehrung des Satzes	Gilt $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig.

FAQ — typische Prüfungsfragen

Wie lautet der Satz des Pythagoras und wann gilt er?

Der Satz des Pythagoras lautet $a^2 + b^2 = c^2$. Er besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse ist. Wichtig ist, dass c dabei immer die Hypotenuse, also die längste Seite gegenüber dem rechten Winkel, bezeichnet. Der Satz gilt ausschließlich in rechtwinkligen Dreiecken; ohne rechten Winkel ist die Gleichung falsch.

Woran erkenne ich die Hypotenuse?

Die Hypotenuse ist die längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks und liegt immer gegenüber dem rechten Winkel. Sie wird in der Formel mit c bezeichnet. Die beiden anderen Seiten, die den rechten Winkel einschließen, sind die Katheten a und b . Wenn du dir unsicher bist, suche zuerst den rechten Winkel und wähle die ihm gegenüberliegende Seite.

Wie berechne ich die Hypotenuse?

Um die Hypotenuse zu berechnen, setzt du die beiden Katheten in die Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ein. Zuerst quadrierst du beide Katheten, addierst die Ergebnisse und ziehst dann die Quadratwurzel. Beispielsweise ergibt sich für $a = 6$ und $b = 4,5$ der Wert $c = \sqrt{36 + 20,25} = \sqrt{56,25} = 7,5$. Das Ergebnis muss größer sein als jede Kathete, sonst hast du einen Fehler gemacht.

Wie berechne ich eine Kathete?

Eine fehlende Kathete berechnest du, indem du die Formel umstellst zu $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Du quadrierst also die Hypotenuse und die bekannte Kathete, subtrahierst und ziehst dann die Wurzel. Wichtig ist, dass von c^2 (dem Hypotenusenquadrat) subtrahiert wird. Für $c = 13$ und $b = 5$ erhält man $a = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$.

Wie prüfe ich, ob ein Dreieck rechtwinklig ist?

Man wählt die längste Seite als c und prüft, ob $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Dazu berechnet man getrennt die Summe der Quadrate der beiden kürzeren Seiten und das Quadrat der längsten Seite. Stimmen beide Werte überein, ist das Dreieck rechtwinklig, andernfalls nicht. Diese Vorgehensweise nennt man die Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

Warum gilt der Satz des Pythagoras?

Der Satz lässt sich über einen Flächenvergleich beweisen. Zeichnet man über jede Seite des rechtwinkligen Dreiecks ein Quadrat, so ist die Fläche der beiden Kathetenquadrate zusammen genau so groß wie die Fläche des Hypotenusenquadrats. Beim klassischen Zerlegungsbeweis legt man vier gleiche Dreiecke in ein großes Quadrat mit der Seite $a + b$; in der Mitte bleibt ein Quadrat mit der Seite c . Der Flächenvergleich liefert dann $a^2 + b^2 = c^2$.

Wie finde ich in einer Figur ein rechtwinkliges Dreieck?

Man zeichnet eine passende Hilfslinie ein, meist eine Diagonale oder eine Höhe. Bei einem Rechteck oder Quadrat ist die Diagonale die Hypotenuse eines Dreiecks aus den beiden Seiten. Bei einem gleichschenkligen Dreieck teilt die Höhe die Figur in zwei rechtwinklige Dreiecke. Bei der Raute stehen die halben Diagonalen senkrecht aufeinander und bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Seite als Hypotenuse.

Wie berechne ich die Diagonale eines Quadrats?

Da bei einem Quadrat beide Seiten gleich lang sind ($a = b$), gilt $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Man kann also entweder direkt beide Seitenquadrate addieren und die Wurzel ziehen oder die Kurzformel $d = a\sqrt{2}$ verwenden. Für $a = 5$ ergibt sich $d = 5\sqrt{2} \approx 7,07$. Die Diagonale ist stets länger als die Seite.

Wie berechne ich die Raumdiagonale eines Quaders?

Die Raumdiagonale eines Quaders berechnet man mit $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, wobei a , b und c die drei Kantenlängen sind. Man kann sie auch in zwei Schritten bestimmen: erst die Flächendiagonale der Grundfläche mit $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann die Raumdiagonale mit $D = \sqrt{d^2 + c^2}$. Beide Wege führen zum selben Ergebnis, da Pythagoras hier zweimal angewendet wird.

Wie gehe ich bei einer Sachaufgabe vor?

Zuerst fertige ich eine Skizze an und trage den rechten Winkel sowie die bekannten Größen ein. Dann entscheide ich, ob die gesuchte Größe die Hypotenuse (dann addieren) oder eine Kathete (dann subtrahieren) ist. Anschließend setze ich in die passende Formel ein, rechne und runde sinnvoll. Zum Schluss schreibe ich einen vollständigen Antwortsatz mit Einheit.

Wie berechne ich den Abstand zweier Punkte im Koordinatensystem?

Man bestimmt den waagerechten Abstand als Differenz der x-Werte und den senkrechten Abstand als Differenz der y-Werte. Diese beiden Strecken sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, der gesuchte Abstand ist die Hypotenuse. Für $P(1 \mid 2)$ und $Q(7 \mid 10)$ ergibt sich $\overline{PQ} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. Man addiert also die Quadrate der Differenzen und zieht die Wurzel.